

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA
TÉCNICA DE TELECOMUNICACIÓN



TRABAJO FIN DE MÁSTER

Máster en Ingeniería Acústica de la
Edificación y el Medio Ambiente

**Análisis del Acoplamiento Vibro-Acústico
en Resonadores de Membrana**

PABLO GONZÁLEZ MARTÍNEZ

Julio de 2013

Máster en Ingeniería Acústica de la Edificación y Medio Ambiente

Trabajo Fin de Máster		
Título	Análisis del acoplamiento vibro-acústico en resonadores de membrana	
Autor	Pablo González Martínez	VºBº
Tutor	Vladimir Ulin Nabatov	
Ponente		
Tribunal		
Presidente	Constantino Gil González	
Secretario	Antonio Pedrero González	
Vocal	Juan Sancho Gil	
Fecha de lectura	15-07-2013	
Calificación		

El Secretario:

Índice

1	Introducción	23
1.1	Motivaciones	25
1.2	Objetivos	25
2	Variables acústicas y relaciones básicas	27
2.1	Variables Acústicas	29
2.2	Relaciones acústicas básicas	32
2.2.1	Ondas sonoras en fluidos	32
2.2.2	Sólidos isótropos	35
2.3	Ecuaciones de onda	38
3	Ondas mecánicas en sólidos	41
3.1	Ondas mecánicas en sólidos ilimitados	43
3.2	Ondas en placas y barras	47
3.2.1	Deformaciones elásticas: extensión y flexión	48
3.2.2	Ondas de extensión	51
3.2.3	Ondas de flexión	53
3.2.4	Radiación sonora de una placa vibrante	56
3.2.5	Pérdidas internas	59
4	Ondas mecánicas en placas	63
4.1	Ondas forzadas de flexión y coincidencia	65

4.2 Ondas libres de flexión en placas con límites fijos	70
4.3 Placas de dimensión finita	74
4.4 Acoplamiento entre ondas de flexión en la placa y ondas sonoras en la capa de aire	84
4.5 Placa finita y capa de aire	95
5 Análisis modal experimental	105
5.1 Introducción	107
5.1.1 Conceptos básicos	108
5.1.2 Tipos de análisis modal	109
5.1.2.1 Ensayo de impacto	112
5.1.2.2 Ensayo con excitador	114
5.1.2.3 Análisis modal operacional	120
5.1.3 Métodos de identificación modal	122
5.1.3.1 Métodos SDOF Locales: Peak Picking	124
5.2 Objetivo del análisis modal	126
5.3 Descripción del resonador bajo ensayo	126
5.4 Procedimiento de medida	128
5.4.1 Instrumentación de medida	128
5.4.2 Conexión del equipamiento de medida	130
5.4.3 Excitación del resonador	131
5.4.3.1 Acoplamiento y montaje del excitador de vibración	131
5.4.3.2 Método de excitación y duración	133

5.4.4 Posiciones de medida/excitación	134
5.4.5 Medición de la respuesta vibratoria del resonador	135
5.5 Procesado de la respuesta temporal	147
5.5.1 Módulo de entrada	148
5.5.2 Módulo FFT	149
5.5.2.1 Fundamentos del análisis DFT-FFT	150
5.5.2.2 Cálculo del autoespectro	154
5.5.2.3 Cálculo del espectro cruzado	158
5.5.2.4 Cálculo de la coherencia	160
5.5.2.5 Cálculo de la FRF	163
5.5.2.6 Configuración y uso del analizador FFT	167
5.5.3 Módulo de análisis modal	173
5.5.4 Módulo de visualización	177
6 Resultados	179
6.1 Modos propios del modelo de la placa (sin acoplamiento)	181
6.2 Modos propios acoplados del modelo del resonador	184
6.3 Respuesta vibratoria experimental del resonador	187
7 Conclusiones	203
8 Referencias bibliográficas	209

Índice de figuras

Figura 2.1. Esfuerzos de tracción y de corte en un elemento de volumen cuadrado de un cuerpo sólido	31
Figura 2.2. Deducción de las relaciones acústicas básicas: a) equilibrio de fuerzas; b) equilibrio de masas.....	32
Figura 2.3. Fuerzas en la dirección x actuando sobre un elemento de volumen de un cuerpo sólido	36
Figura 3.1. Ondas planas en un sólido isótropo: a) onda longitudinal; b) onda transversal	45
Figura 3.2. Polarización de ondas transversales: a) polarización lineal; b) polarización circular, sentido horario o anti-horario; c) polarización elíptica	46
Figura 3.3. Onda de torsión en una barra cilíndrica.....	47
Figura 3.4. Deformaciones elásticas: a) extensión y contracción lateral; b) flexión	49
Figura 3.5. a) Onda de extensión (onda cuasi-longitudinal); b) onda de flexión	53
Figura 3.6. Reacción del aire adyacente a una onda de flexión en una placa: a) por encima de la frecuencia crítica: radiación de una onda sonora; b) por debajo de la frecuencia crítica: flujos de aire locales.....	58
Figura 4.1. Diagrama del principio de transmisión sonora a través de una placa para incidencia oblicua	67
Figura 4.2. Placa semi-infinita apoyada en un extremo y excitada por una onda plana.....	71
Figura 4.3. Desplazamiento resultante de la placa mostrada en la Figura 4.2 en las inmediaciones del soporte para incidencia normal del sonido. Arriba: $t=0$, momento de máximo desplazamiento forzado. Centro: $t=T/8$, desplazamiento	

intermedio. Abajo: $t=T/4$, desplazamiento forzado pasando por cero. El desplazamiento forzado se muestra por una línea discontinua en cada caso. 74

Figura 4.4. Longitudes de onda de flexión de placas de madera contrachapada ($c_L=300000 \text{ cms}^{-1}$) en función de la frecuencia para diferentes espesores 82

Figura 4.5. Gráfica para la ecuación (4.59). Abscisa, L_y ; ordenada, L_z ; parámetro de las curvas, L_{res} 84

Figura 4.6. Placa semi-infinita delante de una capa delgada de aire, apoyada y cerrada en el origen, y excitada por una onda sonora con incidencia oblicua. 86

Figura 4.7. Desplazamiento a la frecuencia propia de flexión más baja, sin la influencia de la compresión del aire. 101

Figura 4.8. Solución gráfica de la ecuación (4.124) para $\beta_0 = 3.35$ 103

Figura 5.1. Clasificación de los métodos de análisis modal 111

Figura 5.2. Representación temporal y contenido en frecuencia de la fuerza aplicada mediante la excitación por impacto. 113

Figura 5.3. Acoplamiento excitador-transductor-estructura. 114

Figura 5.4. Posibles disposiciones del conjunto excitador-estructura (y correspondiente fuerza de reacción del excitador)..... 115

Figura 5.5. Representación temporal de la señal de barrido sinusoidal 116

Figura 5.6. Representación temporal y densidad de probabilidad de amplitud de una señal aleatoria 116

Figura 5.7. Representación temporal de una señal de salva aleatoria 117

Figura 5.8. Representación temporal y densidad de probabilidad de amplitud de una señal pseudo-aleatoria (arriba), y espectro resultante del promediado espectral de N periodos de la señal (abajo)..... 118

Figura 5.9. Representación temporal de una señal de excitación aleatoria periódica.	119
Figura 5.10. Representación temporal y espectro de un pulso rectangular periódico.	119
Figura 5.11. Ensayos de vibración forzada en grandes estructuras: a) puente atirantado Tatará; b) puente colgante Yeongjong; c) agitador de gran fuerza.	121
Figura 5.12. Métodos para la caracterización modal de sistemas estructurales.	122
Figura 5.13. Ejemplos de alto y bajo acoplamiento modal.	123
Figura 5.14. Caracterización modal basada en el modelo SDOF a partir del ajuste de curvas.	124
Figura 5.16. Esquema gráfico acotado de los elementos que conforman el resonador.	127
Figura 5.17. Diagrama de conexión del equipamiento de medida.....	130
Figura 5.18. Acoplamiento magnético del excitador (izquierda) a la placa del resonador (derecha).	132
Figura 5.19. Vistas del montaje del excitador sobre la placa del resonador.	133
Figura 5.20. Vista de la retícula sobre el panel del resonador.....	134
Figura 5.21. Ventana principal de la aplicación dBRTA y ventana de selección del front-end (sistema de adquisición).....	136
Figura 5.22. Ventana principal del módulo ‘Sensors/Calibrators’	137
Figura 5.24. Ventana de calibración para la función ‘Channel Control’.	144
Figura 5.25. Ventana principal del módulo ‘Analyzer’ y ventana de la función ‘Auto Range’.	145
Figura 5.26. Pantalla principal del módulo ‘Post-Processing’.	146

Figura 5.26. Ventana principal de la herramienta de análisis FFT-modal. ...	147
Figura 5.27. Diagrama de bloques de un analizador FFT monocanal.	150
Figura 5.28. Diagrama de bloques simplificado de un analizador FFT de doble canal.	154
Figura 5.29. Promediado lineal de estimaciones instantáneas del espectro cruzado $S_{AB}[k]$: a) la fase de cada estimación $A_i^*[k] B_l[k]$ es la misma; b) pequeñas fluctuaciones en la fase de las estimaciones $A_i^*[k] B_l[k]$; c) fases aleatorias de las estimaciones $A_i^*[k] B_l[k]$. En la figura no se considera la dependencia con la frecuencia por conveniencia.	159
Figura 5.30. El coeficiente de correlación ρ_{xy} indica la cantidad de linealidad entre las variables x e y	161
Figura 5.31. Efectos en la estimación del Autoespectro y el Espectro Cruzado de: a) ruido en la medición de $a(t)$ y/o $b(t)$; b) no linealidad del sistema. Por comodidad, se omite la dependencia de la frecuencia.	163
Figura 5.32. Sistema ideal con una señal de entrada $a(t)$ y una señal de salida $b(t)$. $A(f)$ y $B(f)$ son las Transformadas de Fourier de $a(t)$ y $b(t)$, respectivamente.	164
Figura 5.33. Ajuste de los parámetros de configuración del módulo de análisis modal.	175
Figura 5.34. Ventana del módulo de visualización.	177
Figura 6.1. Patrones de desplazamiento de los seis primeros modos propios de flexión de la placa, ordenados de menor a mayor, de izquierda a derecha y de arriba a abajo.	183
Figura 6.2. Primeros cuatro modos propios del resonador “mitad” (acoplamiento estructura-fluido): desplazamientos vibratorios de la placa (mapa monocromático con relieve) y distribución de la presión acústica dentro de la cavidad de aire bajo la placa (mapas de color).	185

Figura 6.3. Primeros modos acústicos de las cavidades del resonador (sin acoplamiento)	186
Figura 6.4. Superposición de las FRFs promedio para todos los puntos de medida del sistema (eje de ordenadas izquierdo), y FDP de los modos propios identificados (eje de ordenadas derecho).....	188
Figura 6.5. Posiciones de medida cuyos resultados serán evaluados.	189
Figura 6.6. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 11.....	190
Figura 6.7. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 21.....	191
Figura 6.8. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 25.....	191
Figura 6.9. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 32.....	192
Figura 6.10. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 38.....	192
Figura 6.11. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 43.....	193
Figura 6.12. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 65.....	193
Figura 6.13. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 70.....	194
Figura 6.14. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 77.....	194
Figura 6.15. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 92.....	195

Figura 6.16. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 93.	195
Figura 6.17. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 105.	196
Figura 6.18. Función densidad de probabilidad de las frecuencias propias identificadas en todos los puntos de medida.....	198
Figura 6.19. Patrón de desplazamiento identificado para la primera frecuencia modal $f=17.2$ Hz.	199
Figura 6.20. Patrón de desplazamiento para la frecuencia $f=32$ Hz.	200
Figura 6.21. Patrones de desplazamiento identificados para las frecuencias $f=38.3$ Hz (izqda.) y $f=39.8$ Hz (dcha.).....	201
Figura 6.22. Patrón de desplazamiento identificado para $f=48.4$ Hz.	201

Índice de tablas

Tabla 3.I. Módulo de Young y coeficiente de Poisson de algunos sólidos	51
Tabla 3.II. Factor de pérdidas de algunos materiales empleados habitualmente en la construcción.....	61
Tabla 4.I. Frecuencias críticas estimadas para diversos materiales	70
Tabla 5.I. Diferentes formas de la función de respuesta en frecuencia	109
Tabla 5.II. Guía para la elección del método de excitación según su aplicación.	120
Tabla 5.III. Base de datos de transductores: lista de modelos (arriba) y lista de transductores (abajo).....	138
Tabla 5.IV. Base de datos de calibradores: lista de modelos (arriba) y lista de calibradores (abajo).....	138
Tabla 5.V. Configuración de hardware empleada en el proceso de medición.	140
Tabla 5.VI. Configuración de la etapa de salida del sistema NetdB.	141
Tabla 5.VII. Configuración del análisis FFT	142
Tabla 5.VIII. Características de las ventanas más habituales.	152
Tabla 5.IX. Elección inicial de la ventana basada en el contenido de la señal	152
Tabla 5.X. Factores de corrección y máximos errores de amplitud para ventanas	153
Tabla 5.XI. Ajuste de los parámetros de configuración del módulo FFT.	171
Tabla 6.I. Frecuencias propias de la placa sin acoplamiento.	183

Tabla 6.II. Frecuencias propias de los primeros modos de flexión del resonador bajo ensayo (acoplamiento estructura-fluido)..... 184

Tabla 6.III. Frecuencias propias del sistema y fase relativa de la respuesta para dichas frecuencias en los diferentes puntos de medida considerados. 197

Tabla 6.IV. Fase relativa de la respuesta (aceleración) del sistema para las frecuencias propias resultantes del análisis estadístico..... 198

Tabla 6.V. Comparativa de las frecuencias propias obtenidas para la placa (simulación sin acoplamiento), el resonador “mitad” (simulación con acoplamiento) y el resonado bajo ensayo (análisis experimental) 202

Resumen

El presente Trabajo Fin de Master pretende llevar a cabo el análisis del comportamiento vibratorio de resonadores de membrana, consistentes en un panel delgado y ligero montado a cierta distancia de un elemento constructivo rígido y pesado. Este tipo de sistemas resonantes son empleados habitualmente como absorbentes de media-baja frecuencia en aplicaciones de acondicionamiento acústico de salas. El análisis hará especial hincapié en la influencia del acoplamiento mecánico-acústico entre la placa vibrante (estructura) y el colchón de aire (fluido) encerrado entre la misma y la pared rígida.

En primer lugar, realizaremos el análisis modal experimental del resonador objeto de ensayo a partir de las mediciones de su respuesta vibratoria, con el fin de caracterizar su comportamiento en base a sus primeros modos propios acoplados de flexión. El análisis de las señales vibratorias en el dominio de la frecuencia para la identificación de dicho modos se realizará en el entorno de programación MATLAB, haciendo uso de una herramienta propia que implementa los métodos de cálculo y los algoritmos necesarios para tal fin.

Asimismo, simularemos el comportamiento del resonador mediante el método de elementos finitos (FEM), utilizando las aplicaciones ANSYS y SYSNOISE, considerando diferentes condiciones frontera en el modelo generado. Los resultados aquí obtenidos serán de utilidad para complementar aquellos obtenidos de forma experimental a la hora de extraer conclusiones prácticas del análisis realizado.

Summary

This Master's Thesis intends to carry out the analysis of the vibratory behaviour of resonance absorbers, consisting of a thin and lightweight panel mounted at a distance from a rigid wall. Such systems are commonly used as sound absorption systems for mid-low frequency in room acoustics applications. The analysis will emphasize the influence of mechanical-acoustic coupling between the vibrating plate (structure) and the air cushion (acoustic element) enclosed behind it.

First of all, we are performing the experimental modal analysis of the resonance absorber under test from the vibrational response measurements, in order to characterize its behaviour based on its first bending coupled-modes. The analysis of vibration signals in the frequency domain for the identification of such modes will be made in MATLAB programming environment, using a proprietary tool that implements the calculation methods and algorithms needed for this purpose.

Furthermore, we are simulating the behaviour of the resonance absorber applying the Finite Element Method (FEM) – using ANSYS and SYSNOISE applications - considering different boundary conditions in the model created. The results from the simulation will be useful to complement those obtained experimentally when drawing practical conclusions from this analysis.

1 Introducción

En este primer capítulo indicaremos brevemente las motivaciones que han propiciado la elección y desarrollo de este trabajo, así como los objetivos fundamentales que se pretenden conseguir con el mismo.

1.1 Motivaciones

La principal motivación para la elección y el desarrollo del presente estudio surge del Trabajo Fin de Master: SANCHO GIL, Juan – *Absorción sonora de sistemas resonantes. Placas vibrantes como absorbente sonoro* [1]. En dicho trabajo se lleva a cabo un estudio detallado del comportamiento vibratorio y la absorción sonora de un resonador de membrana que será empleado como muestra de referencia en la intercomparación entre laboratorios para el procedimiento de medida del coeficiente de absorción sonora en cámara reverberante según la Norma UNE-EN ISO 354:2004. Además este tipo de sistemas son ampliamente utilizados como absorbentes sonoros de baja frecuencia en aplicaciones de acondicionamiento acústico.

Tras finalizar el estudio de dicho resonador, se plantea la idea de realizar alguna modificación en el mismo con el fin de mejorar sus características acústicas, a la par que dotarlo de una mayor consistencia estructural que permita su transporte y manejo de una forma más segura y cómoda. Así, el presente trabajo pretende dar continuidad al estudio mencionado, analizando el comportamiento de esta nueva configuración del resonador de membrana en cuestión.

Por otro lado, también supone un motivo adicional la posibilidad de indagar en el estudio de las vibraciones mecánicas en sólidos, que en algunos casos no reciben la consideración ni la importancia que tienen realmente. Aunque es frecuente pensar que en el campo de la acústica las vibraciones en sólidos presentan una importancia menor que el sonido en medios fluidos, en la práctica la mayor parte del ruido que sufrimos en nuestra vida diaria proviene de fuentes sonoras que radian energía a partir de la acción de superficies sólidas vibrando sobre el medio fluido que las rodea. De hecho, la actuación sobre la vibración de elementos o estructuras mecánicas constituye la primera y más efectiva estrategia para el control de ruido.

1.2 Objetivos

El objetivo fundamental de este trabajo es el estudio del comportamiento vibratorio del sistema resonante mencionado en el apartado anterior. Este estudio, basado en el análisis modal experimental del sistema bajo ensayo, prestará especial

atención a la influencia que produce el acoplamiento mecánico-acústico entre la membrana o placa (parte estructural) y el aire encerrado en las cavidades (parte acústica) sobre el comportamiento del resonador.

Para dicho análisis se considerará el método de excitación y registro más apropiado para garantizar la representatividad estadística de los resultados. También se presentará un procedimiento de ensayo para el análisis modal experimental del sistema, puesto que este tipo de mediciones no se encuentran regulados por ninguna normativa técnica internacional. En dicho procedimiento, se hará especial hincapié en el montaje del resonador y el sistema de excitación.

Utilizando el entorno de programación de MATLAB, se desarrollará una herramienta propia con las técnicas de procesamiento necesarias para la estimación de la función de respuesta en frecuencia y la caracterización modal del sistema bajo ensayo a partir de las mediciones de la aceleración vibratoria en diferentes puntos del mismo. Esta herramienta permitirá abordar el análisis sistemático de grandes cantidades de datos experimentales de forma cómoda y automatizada.

Por otro lado, se modelará el resonador para simular la vibración de la placa y el campo acústico en uno de los dos colchones de aire del resonador empleando el método de elementos finitos (FEM), aplicando diferentes condiciones frontera. Para ello utilizaremos las aplicaciones ANSYS y SYSNOISE. Conviene aclarar que el fin de esta simulación en sí misma no es la elaboración de un modelo preciso del sistema resonante, sino obtener los datos necesarios para una valoración fundamentalmente cualitativa del efecto del acoplamiento estructura-fluido que sirva de apoyo a los resultados experimentales obtenidos.

Por último, y partiendo fundamentalmente de los resultados experimentales obtenidos, compararemos el comportamiento vibro-acústico del resonador bajo análisis con el caso del resonador original. Para evitar confusiones, si no se indica lo contrario nos referiremos al resonador objeto de ensayo (que podríamos denominar “doble” al contar con dos cavidades bajo la placa, fija en su eje de simetría, como veremos en su momento); mientras que para referirnos al resonador en su configuración original, utilizaremos el término resonador “entero”.

2 Variables acústicas y relaciones básicas

A lo largo de este capítulo se tratarán con detalle los cambios del estado físico ocasionados por una onda sonora en un medio y que, de hecho, constituyen la propia naturaleza del sonido. El estado instantáneo de un medio se puede describir especificando los valores que toman determinadas magnitudes como la presión, densidad, temperatura, etc.; todas ellas son alteradas cuando una onda sonora se propaga en el medio. En cambio, las propiedades de una onda sonora se pueden describir por medio de dichas magnitudes, a las que denominaremos variables del campo acústico. Algunas de ellas, como, por ejemplo, la presión, son de especial importancia por ser muy ilustrativas y, al mismo tiempo, prestarse a una medición directa. Las relaciones existentes entre estas variables se discutirán asimismo en este capítulo.

2.1 Variables Acústicas

Una forma patente de caracterizar la vibración de un cuerpo oscilante es determinar el vector de desplazamiento \vec{s} con sus componentes ξ , η y ζ en coordenadas cartesianas. Este sencillo concepto también puede ser aplicado a un campo sonoro. Así, \vec{s} representa el desplazamiento de una partícula¹ del medio respecto a su posición de equilibrio. En la práctica, es más habitual emplear la velocidad \vec{v} con la que se mueve la partícula que el propio desplazamiento de la misma. Esta velocidad de la partícula no se debe confundir con la velocidad del sonido, que es la velocidad con la que una perturbación se propaga a través del medio. Se obtiene a partir del desplazamiento mediante derivación temporal de acuerdo con la ecuación (2.1). Puesto que \vec{s} es función tanto del espacio como del tiempo, se aplica la derivada parcial.

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{s}}{\partial t} \quad (2.1)$$

La dependencia espacial de \vec{s} pone de manifiesto que la transferencia del movimiento oscilatorio entre elementos de volumen adyacentes lleva asociada cierto retardo. Así, diferentes puntos de un campo sonoro se encuentran generalmente en

¹ Con el término partícula no nos referimos a las propias moléculas del medio, sino a pequeños elementos de volumen en los que los movimientos moleculares por efecto de la agitación térmica se ven finalmente promediados.

diferentes estados de vibración en un instante de tiempo dado. Por tanto, un medio que conduce una onda sonora estará sometido a deformaciones.

Consideremos en primer lugar la propagación sonora en un fluido, ya sea en un líquido o en un gas. Las deformaciones causadas por los movimientos asíncronos de partículas vecinas consisten en compresiones y rarefacciones locales. Así, llegamos a otra magnitud acústica, la variación ρ_{\approx} de la densidad. Además, cualquier cambio en la densidad de un fluido está asociado al correspondiente cambio p_{\approx} de la presión dentro del mismo. Por lo tanto, la densidad y la presión totales son

$$\rho_t = \rho_0 + \rho_{\approx} \quad (2.2)$$

$$p_t = p_0 + p_{\approx} \quad (2.3)$$

donde ρ_0 y p_0 representan los valores de dichas variables con el medio en reposo. La variación de presión, como ya hemos comentado, es una variable particularmente importante al poder ser medida de forma directa; se denomina presión sonora y tiene dimensiones de Newton por metro cuadrado (N/m^2). Esta unidad también se conoce como Pascal (Pa).

La presión dentro de un fluido es una magnitud adireccional que actúa perpendicularmente sobre cualquier superficie límite. La distribución de fuerzas dentro de un gas queda completamente definida al especificar la presión. Esto también se mantiene para líquidos siempre que se ignore la tensión superficial y la viscosidad. Sin embargo, esto no se cumple para los sólidos ya que no sólo tienden a preservar su volumen, sino también su forma. Esto implica más componentes de fuerza aparte de la presión. La Figura 2.1 proporciona una idea sobre las fuerzas que pueden tener lugar dentro de un sólido, en particular de un elemento de volumen cuadrado. En su cara derecha puede estar expuesto a una fuerza de tracción en la dirección x . También pueden actuar fuerzas tangenciales en dicha cara, denominadas fuerzas de corte, que serían inconcebible para un fluido ya que éste no produciría fuerzas elásticas contrarias para equilibrar dichas fuerzas de corte.

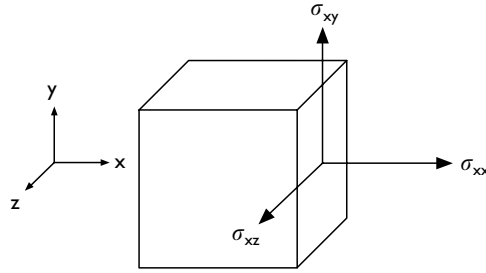


Figura 2.1. Esfuerzos de tracción y de corte en un elemento de volumen cuadrado de un cuerpo sólido

Al igual que con la presión en un fluido, es útil relacionar las fuerzas en un sólido con el área sobre la que actúan. Se llaman esfuerzos elásticos y se miden en N/m^2 . Se deben distinguir los esfuerzos normales o de tracción de los esfuerzos tangenciales o de corte. Los últimos se pueden dividir en dos componentes de acuerdo a los ejes coordinados. Los esfuerzos se designan mediante el símbolo σ_{ik} , donde el primer subíndice indica la orientación de la cara sobre la que está actuando mientras que el segundo indica la dirección de la fuerza. De este modo, en el caso general las fuerzas que actúan sobre la cara derecha en la Figura 2.1 son el esfuerzo normal σ_{xx} y los esfuerzos de corte σ_{xy} y σ_{xz} . Esfuerzos similares actúan sobre las otras caras del elemento de volumen, por lo que se obtienen nueve esfuerzos elásticos que forman lo que se conoce como tensor de esfuerzos:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

En el caso de sólidos isótropos, podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \quad (2.5)$$

Esas relaciones reducen el número de componentes del esfuerzo independientes a seis, las cuales caracterizan el estado dinámico de un cuerpo sólido isótropo en un punto determinado.

2.2 Relaciones acústicas básicas

En este apartado se presentan de una forma más detallada las relaciones existentes entre las variables acústicas presentadas anteriormente. El objetivo es obtener las ecuaciones que vinculan el movimiento de las partículas del material con las fuerzas presentes en el medio. Para conseguir tal fin, se aplicarán los principios de conservación del momento y de la materia a elementos de pequeño volumen dentro del medio considerado.

2.2.1 Ondas sonoras en fluidos

Comenzaremos considerando los gases y líquidos no viscosos, pues en estos casos una única magnitud adireccional, la presión, es suficiente para caracterizar el estado dinámico del medio. Por tanto, es razonable esperar que las relaciones que busquemos sean más sencillas que aquellas que se dan en los sólidos, las cuales serán abordadas en sucesivos apartados. A partir de este momento se omitirá sin riesgo de confusión el subíndice \approx de los símbolos p y ρ empleados en el apartado anterior.

En primer lugar valoraremos la propagación de estados oscilatorios en una onda sonora unidimensional. La Figura 2.2a muestra un elemento de volumen del medio considerado. Las líneas superior e inferior deben considerarse como las paredes de un tubo rígido, o simplemente como unos límites imaginarios. El hecho esencial es que el estado del medio depende únicamente de la coordenada espacial x . La longitud infinitesimal del elemento de volumen se designa mediante dx , mientras que el área de la sección transversal del tubo real o imaginario es dS . La presión sonora en x es $p(x)$; en consecuencia, la fuerza que actúa sobre la cara izquierda del elemento de volumen es $p(x)dS$. De manera similar, la fuerza ejercida sobre el límite derecho es $p(x+dx)dS$.

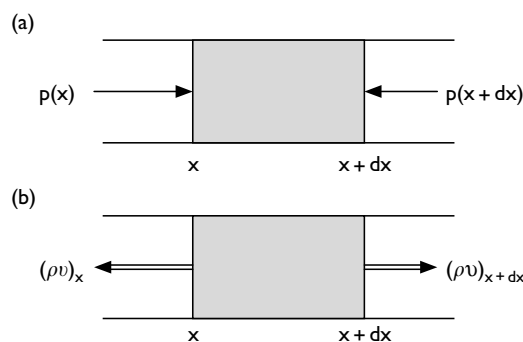


Figura 2.2. Deducción de las relaciones acústicas básicas: a) equilibrio de fuerzas; b) equilibrio de masas

La fuerza diferencial –ecuación (2.6)- entre ambos extremos acelera la masa $\rho_t dx dS$ del medio en el interior del elemento de volumen y debe superar la fuerza inercial que viene dada por dicha masa multiplicada por la aceleración dv_x/dt , donde v_x representa la componente en la dirección del eje x de la velocidad de la partícula.

$$- [p(x + dx) - p(x)] dS = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dS \quad (2.6)$$

Igualando ambas fuerzas, y después de cancelar el volumen $dx dS$ en ambos lados, obtenemos:

$$- \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_t \frac{dv_x}{dt} \quad (2.7)$$

El símbolo de derivación d/dt en el lado derecho indica la aceleración total que experimentaría un observador moviéndose junto al elemento de volumen. Se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (2.8)$$

El primer término de la derecha es la aceleración local de la masa contenida en el elemento de volumen, es decir, la aceleración que un observador en reposo advertiría. Una vez sustituida esta expresión, la ecuación (2.7) resulta en

$$- \frac{\partial p}{\partial x} = \rho_t \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \quad (2.9)$$

A continuación establecemos el balance de masa para el elemento de volumen considerado observando la Figura 2.2b. A diferencia del desarrollo anterior, el elemento de volumen se supone ahora fijo en el espacio, esto es, no se mueve con el medio. En el lado izquierdo la masa que fluye por segundo hacia el elemento de volumen es $(\rho_t v_x)_x dS$, donde la velocidad de flujo en la dirección positiva del eje x es positiva. De forma similar, la cantidad de masa que fluye a través del límite derecho es $-(\rho_t v_x)_{x+dx} dS$. El influjo neto de masa es

$$- [(\rho_t v_x)_{x+dx} - (\rho_t v_x)_x] dS = - \frac{\partial (\rho_t v_x)}{\partial x} dx dS \quad (2.10)$$

Debido a la conservación de la masa, se incrementa la densidad en el elemento de volumen $dx dS$:

$$-\frac{\partial(\rho_t v_x)}{\partial x} dx dS = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dS \quad (2.11)$$

o

$$-\rho_t \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.12)$$

Para completar el desarrollo necesitamos la relación entre presión y densidad, denominada ecuación de estado. En general, esta relaciona tres magnitudes físicas: la presión p_t , la densidad ρ_t del fluido y su temperatura absoluta T . En acústica podemos asumir, salvo raras excepciones, que las compresiones y rarefacciones del medio se suceden demasiado rápido como para permitir cualquier intercambio de calor entre elementos de volumen adyacentes. Este tipo de cambios de estado se llaman adiabáticos, y en estos casos la temperatura se determina a partir de las otras dos magnitudes. La ecuación de estado queda simplificada a:

$$p_t = p_t(\rho_t) \quad (2.13)$$

Así, las magnitudes densidad, presión y velocidad de la partícula quedan relacionadas mediante las Ecuaciones (2.9), (2.12) y (2.13). Desafortunadamente, estas ecuaciones no son lineales por lo que no es posible utilizarlas para eliminar dos de ellas y obtener una ecuación que la tercera variable habría de satisfacer. Sin embargo, en una onda sonora la velocidad de las partículas es tan pequeña que podemos desestimar el último término de las Ecuaciones (2.9) y (2.12). Además, salvo en situaciones acústicas muy intensas, por ejemplo en las proximidades a una explosión, las variaciones de presión y densidad son muy pequeñas en comparación con sus valores constantes ρ_0 y p_0 :

$$\rho \ll \rho_0, \quad p \ll p_0 \quad (2.14)$$

Así, la variación de la presión del aire causada por un tono de sonoridad media (≈ 60 decibelios) es menor en al menos un factor de 10^7 que la presión atmosférica habitual de 10^5 Pa. Por tanto, es permisible sustituir ρ_t por ρ_0 en las Ecuaciones (2.9) y (2.12).

Finalmente, para “linealizar” también la Ecuación (2.13) aproximamos la relación generalmente no lineal por una relación lineal aplicando $p_t - p_0 = p$ y $\rho_t - \rho_0 = \rho$:

$$p = \left(\frac{dp_t}{d\rho_t} \right)_{\rho_0} \cdot \rho = c^2 \rho \quad (2.15)$$

donde se ha introducido la abreviación

$$c^2 = \left(\frac{dp_t}{d\rho_t} \right)_{\rho_0} \quad (2.16)$$

Normalmente esta relación entre presión y densidad puede ser normalmente considerada constante mientras la intensidad sonora no sea excesivamente alta. Por tanto, las ecuaciones fundamentales “linealizadas” de un campo sonoro unidimensional son:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (2.17)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.18)$$

En esta última ecuación la variación de densidad ρ ha sido expresada como presión sonora p haciendo uso de la Ecuación (2.15), donde la constante c es la velocidad del sonido.

2.2.2 Sólidos isótropos

En este apartado consideraremos la situación algo más complicada de los sólidos. Para evitar complicaciones innecesarias restringiremos el estudio a sólidos isótropos, que se caracterizan por ser sus propiedades físicas independientes de la dirección de una influencia externa, por ejemplo, un campo eléctrico o una fuerza mecánica.

Al igual que en el desarrollo de la ecuación (2.6), calculamos la fuerza neta que actúa sobre un elemento de volumen del material $dV = dx dy dz$ que se considera fijo dentro del sólido. La Figura 2.3 representa una sección a través de un elemento con eje z perpendicular al plano de la página. En primer lugar consideraremos la diferencia entre los esfuerzos normales σ_{xx} que actúan en las caras izquierda y derecha del elemento, ambas perpendiculares al eje x . Esta diferencia forma el primer término de

la expresión que se indica a continuación, que se corresponde al lado izquierdo de la ecuación (2.6).

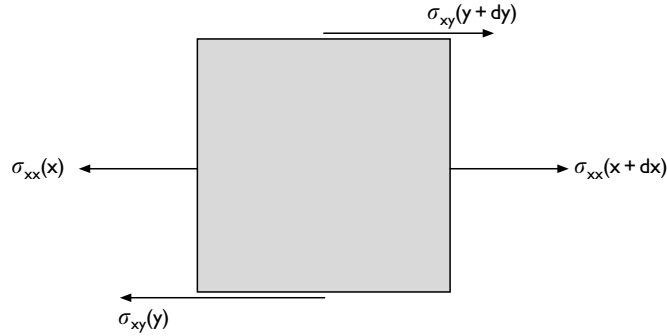


Figura 2.3. Fuerzas en la dirección x actuando sobre un elemento de volumen de un cuerpo sólido

Recordemos que los esfuerzos normales no son la única componente de fuerza en la dirección del eje x, otras son los esfuerzos de cizalla σ_{yx} que actúan sobre las caras perpendiculares al eje y, y que dan lugar a la fuerza neta representada por el segundo término. De forma análoga, los esfuerzos de corte σ_{zx} (no se muestran en la Figura 2.3) en las caras perpendiculares al eje z se tienen en cuenta mediante el tercer término de la expresión. Así, la componente de fuerza en la dirección x es:

$$\begin{aligned} & [\sigma_{xx}(x + dx) - \sigma_{xx}(x)] dydz + [\sigma_{xy}(y + dy) - \sigma_{xy}(y)] dx dz \\ & + [\sigma_{xz}(z + dz) - \sigma_{xz}(z)] dx dy = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) dx dy dz \end{aligned} \quad (2.19)$$

Esta fuerza debe ser compensada por la componente x de la fuerza de inercia que el elemento de volumen ejerce cuando es acelerado. Esta componente es la masa $\rho_t dx dy dz$ del elemento de volumen considerado multiplicado por su aceleración. Asumiendo que la velocidad de las partículas dentro del sólido es muy pequeña y que la parte variable de la densidad es pequeña en comparación con su valor en reposo, podemos sustituir la aceleración total por la aceleración local. De este modo, tras cancelar $dx dy dz$, se obtiene una ecuación “linealizada” que se corresponde con la ecuación (2.17):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

De nuevo se ha sustituido ρ_t por ρ_0 . Reemplazando el segundo subíndice x de los esfuerzos por y y z se obtienen dos ecuaciones similares para las componentes y y z de la aceleración, $\partial^2 \eta / \partial t^2$ y $\partial^2 \zeta / \partial t^2$ respectivamente.

Una vez tratadas las fuerzas de inercia, debemos prestar atención al otro componente de cualquier movimiento oscilatorio, las fuerzas elásticas de recuperación. Cuando un cuerpo sólido es deformado, este reaccionará con fuerzas elásticas que tienden a restablecer su estado original. Estas deformaciones pueden ser cambios fraccionales en las dimensiones del cuerpo o cambios en su forma. Formalmente se expresan mediante las derivadas parciales de las componentes del desplazamiento ξ , η y ζ respecto a las coordenadas x , y y z .

Los esfuerzos y las derivadas relevantes de los desplazamientos están relacionadas entre sí por medio de las siguientes expresiones:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \vec{s}, \text{ y de igual modo para } \sigma_{yy} \text{ y } \sigma_{zz} \quad (2.21)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \text{ y de igual modo para } \sigma_{yz} \text{ y } \sigma_{xz} \quad (2.22)$$

donde

$$\operatorname{div} \vec{s} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (2.23)$$

La expresión $\operatorname{div} \vec{s}$, denominada divergencia del vector de desplazamiento \vec{s} , se introduce como una notación abreviada. Físicamente, describe una deformación conocida como dilatación o –de forma más precisa- dilatación cúbica, que es el incremento relativo de volumen o –salvo por el signo- el cambio relativo de densidad. Los símbolos μ y λ (no confundir con la longitud de onda acústica) son constantes elásticas del material, denominadas constantes de Lamé. Las ecuaciones (2.21) y (2.22) representan de alguna manera la ecuación de estado del sólido. Su linealidad está garantizada incluso a los mayores esfuerzos mecánicos encontrados en las ondas sonoras.

2.3 Ecuaciones de onda

Las relaciones desarrolladas en los apartados anteriores se pueden resumir y concentrar en una ecuación con una única variable acústica, la presión sonora si consideramos primeramente el sonido en un fluido. Para este propósito se elimina la velocidad de las partículas v_x de las ecuaciones linealizadas (2.17) y (2.18); lo que se consigue derivando parcialmente la ecuación (2.17) respecto a x y la ecuación (2.18) respecto a t . Esto nos lleva a

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

Esta ecuación diferencial se conoce como ecuación de onda y es de fundamental importancia en acústica; no sólo la presión sonora debe cumplirla, sino todas las variables acústicas. Por otra parte, también describe la propagación de otros tipos de onda, por ejemplo, ondas transversales viajando en cuerdas, las cuales constituyen la base de muchos instrumentos musicales. En este caso se debe remplazar la presión sonora p por el desplazamiento transversal de la cuerda y la constante c difiere de aquella en la ecuación (2.16).

La ecuación (2.24) es válida sólo para ondas sonoras unidimensionales. Sin embargo, los campos sonoros reales son más complejos, son tridimensionales. Esto implica que debemos considerar también las componentes v_y y v_z del vector de velocidad de las partículas. En consecuencia, se deben establecer dos ecuaciones más del tipo de la ecuación (2.17), remplazando en la misma la variable x por y y z . Las tres relaciones resultantes se pueden combinar en una sola aplicando la siguiente notación vectorial:

$$-\text{grad } p = \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad (2.25)$$

donde $\text{grad } p$ es un vector, llamado gradiente de p , con las componentes

$$\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial z}$$

De forma similar, la ecuación (2.18) debe ampliarse remplazando el cociente diferencial $\partial v_x / \partial x$ por

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv \text{div } \vec{v} \quad (2.26)$$

Esta expresión es la derivada temporal de la dilatación introducida en la ecuación (2.23). Por tanto, la forma tridimensional de la ecuación (2.18) es la siguiente:

$$\rho_0 \text{div } \vec{v} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.27)$$

De aquí se obtiene la dilatación mediante la integración respecto al tiempo t .

$$\text{div } \vec{s} = -\frac{p}{\rho_0 c^2} \quad (2.28)$$

La ecuación (2.25) contiene una importante declaración sobre la naturaleza de las ondas sonoras en fluidos: una onda sonora viaja en aquella dirección en la que la interacción entre elementos de volumen adyacentes, debida a diferencias de presión, es más fuerte, es decir, en la dirección del gradiente de presión. Esta también es la dirección en la que el vector \vec{v} que representa la velocidad de las partículas apunta y, por tanto, la dirección del vector de desplazamiento \vec{s} . Las ondas de este tipo se denominan ondas longitudinales. Así, la ecuación (2.25) indica que las ondas sonoras en gases y líquidos son ondas longitudinales. Sus equivalentes en sólidos son las ondas transversales. En la Figura 3.1 se muestra una representación esquemática de ondas planas longitudinales y transversales.

Como en el caso unidimensional, combinando las ecuaciones (2.25) y (2.27) se llega a una ecuación de onda en una forma más general. Para ello, se aplica la operación de divergencia a la ecuación (2.25) dando como resultado:

$$-\text{div grad } p = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0 \text{div } \vec{v}) \quad (2.29)$$

Puesto que la expresión entre paréntesis viene dada por la ecuación (2.27), inmediatamente se obtiene

$$\Delta p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (2.30)$$

donde el operador de Laplace $\Delta \equiv \text{div grad}$ se ha introducido como notación abreviada. En coordenadas rectangulares el lado izquierdo de la ecuación (2.30) queda de la siguiente forma:

$$\Delta p \equiv \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \quad (2.31)$$

Aunque las ecuaciones (2.25), (2.27) y (2.30) se han desarrollado en base a coordenadas cartesianas, su validez no se limita a un sistema de coordenadas particular. Si se desea emplear otro sistema de coordenadas, por cualquier motivo, tan sólo es necesario aplicar las expresiones respectivas para las operaciones vectoriales div, grad y Δ .

La ecuación de onda para un sólido isótropo es algo más complicada debido a la mayor variedad de magnitudes que describen la dinámica de un sólido. Para la componente de elongación ξ , por ejemplo, se obtiene expresando en la ecuación (2.20) los esfuerzos elásticos mediante las derivadas de las componentes de la elongación de acuerdo a las ecuaciones (2.21) y (2.22):

$$\mu \Delta \xi + (\mu + \lambda) \frac{\partial(\text{div } \vec{s})}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (2.32)$$

Las ecuaciones correspondientes para las componentes η y ζ son:

$$\mu \Delta \eta + (\mu + \lambda) \frac{\partial(\text{div } \vec{s})}{\partial y} = \rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.33)$$

$$\mu \Delta \zeta + (\mu + \lambda) \frac{\partial(\text{div } \vec{s})}{\partial z} = \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

Estas ecuaciones de onda se tratarán con más detalle en el Capítulo 3.

3 Ondas mecánicas en sólidos

En una primera impresión puede parecer que las vibraciones en sólidos sólo desempeña un papel menor en comparación con el sonido en fluidos y, en particular, en el aire; lo cual podría responder a la incapacidad de escuchar las ondas mecánicas en sólidos. Sin embargo, esta es una impresión equivocada: buena parte del ruido que sufrimos en nuestra vida diaria se debe a ondas sonoras que son excitadas principalmente en cuerpos sólidos, por ejemplo, en componentes de maquinaria, y son radiadas posteriormente al medio ambiente a través de alguna cubierta, etc. En este contexto generalmente hablamos de sonido estructural, o vibraciones. Este tipo de ondas mecánicas también se encuentran en edificios; se propagan en paredes y techos y son las responsables por nuestra experiencia de que no estemos completamente aislados del sonido procedente del exterior o de fuentes de ruido dentro del edificio.

3.1 Ondas mecánicas en sólidos ilimitados

Consideremos en primer lugar un sólido isótropo de composición uniforme e ilimitado en todas las direcciones. Tal y como se ha explicado en el Apartado 2.1, las variables relevantes son los esfuerzos elásticos – ver ecuaciones (2.4) y (2.5) – y las componentes cartesianas ξ , η y ζ del desplazamiento de las partículas. Estas últimas obedecen las tres ecuaciones de onda (2.32), (2.33) y (2.34) que están acopladas entre sí. El hecho de que cada una de ellas contenga las tres componentes hace que la propagación de ondas en sólidos sea considerablemente más compleja que en fluidos.

No obstante, podemos hacernos una idea de los posibles tipos de onda restringiendo el análisis a ondas planas que se propagan, por ejemplo, en la dirección x . En este caso todas las derivadas parciales de las componentes del desplazamiento respecto a y y z son cero en dichas ecuaciones de onda. Lo que queda del operador de Laplace en la izquierda es sólo la derivada de segundo orden respecto a x ; del mismo modo $\text{div} \vec{s}$ se reduce a $\partial \xi / \partial x$. Por tanto, el segundo término de la ecuación (2.32) se convierte en $\partial^2 \xi / \partial x^2$ mientras que el segundo término de las ecuaciones (2.33) y (2.34) es cero. De esta forma se obtiene un conjunto de ecuaciones de onda mutuamente independientes para las tres componentes del desplazamiento:

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.1)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

La primera ecuación hace referencia a una onda con vibración de las partículas en la dirección de propagación del sonido –como sucede en las ondas sonoras en gases y líquidos-. Esta es una onda longitudinal en la que la única componente de esfuerzo distinta de cero es σ_{xx} de acuerdo con la ecuación (2.21). Por el contrario, en las ondas descritas por las ecuaciones (3.2) y (3.3) las partículas del medio se mueven perpendicularmente a la dirección de propagación. Estas ondas se denominan transversales, y el medio experimenta deformaciones de corte que serían imposibles en un fluido no viscoso. Así, podemos afirmar que pueden existir tres tipos de onda en un sólido isótropo, concretamente, una onda longitudinal y dos ondas transversales con vibraciones de las partículas perpendiculares entre sí. Cuáles de estas ondas están presentes realmente en una situación particular y cuáles son las proporciones entre sus amplitudes depende del método de excitación.

Comparando las ecuaciones anteriores con la ecuación (2.24) resulta obvio que la velocidad de la onda longitudinal viene dada por

$$c_L = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho_0}} \quad (3.4)$$

Las ondas transversales viajan con una velocidad menor:

$$c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} \quad (3.5)$$

La Figura 3.1 muestra las deformaciones de un medio causadas por una onda longitudinal y una onda transversal en la forma de una red que consta de células cuadradas (o más bien cubos) cuando el medio está en reposo. Bajo la influencia de una onda longitudinal los elementos de volumen son estirados o comprimidos en la dirección de propagación. Estas deformaciones alteran, por supuesto, la densidad del medio. Por tanto, la onda longitudinal también se conoce como onda de compresión o de densidad. Por el contrario, una onda transversal no altera el volumen de una célula elemental; lo único que cambia es su forma: las células elementales experimentan una

deformación de cizalla o corte. Así, la onda transversal también se conoce como onda de corte.

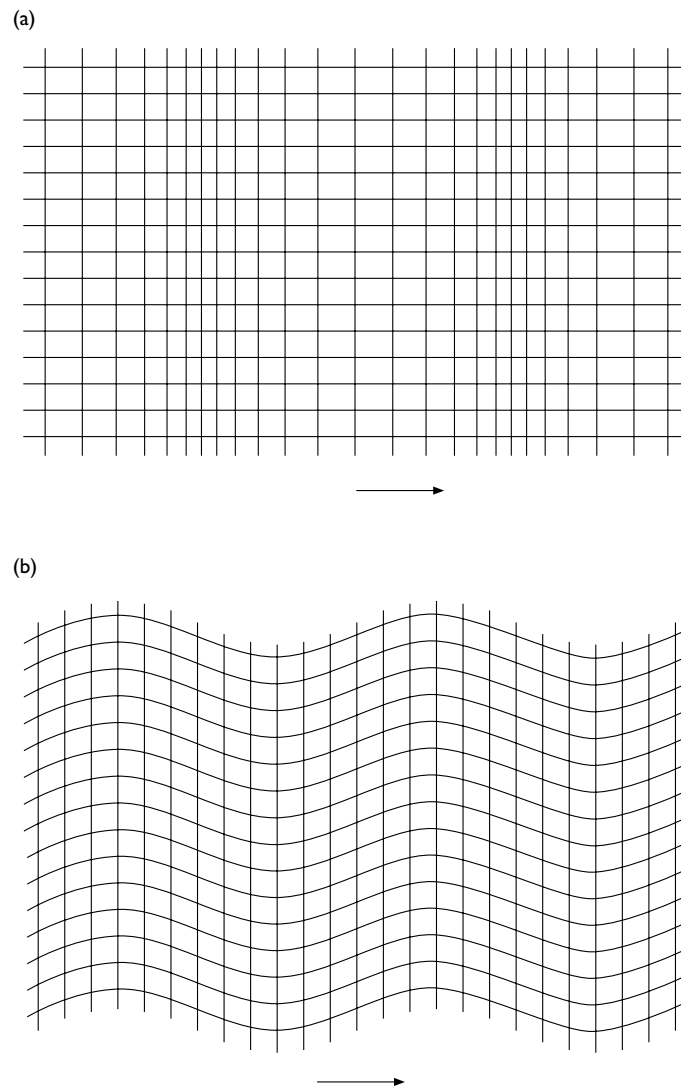


Figura 3.1. Ondas planas en un sólido isótropo: a) onda longitudinal; b) onda transversal

Por supuesto, la vibración de una partícula en una onda transversal no es necesariamente paralela al eje y o z ; resultan infinitas posibilidades de la combinación lineal de ambas componentes de desplazamiento. Describamos el desplazamiento mediante

$$\eta(x, t) = \hat{\eta} \cos(\omega t - k_T x - \varphi_1) \quad (3.6)$$

$$\zeta(x, t) = \hat{\zeta} \cos(\omega t - k_T x - \varphi_2) \quad (3.7)$$

con $k_T = \omega/c_T$. Entonces, el movimiento de las partículas se produce a lo largo de la línea que forma un ángulo $\varepsilon = \arctan(\hat{\xi}/\hat{\eta})$ con la dirección y si $\varphi_1 = \varphi_2$. En este caso hablamos de ondas polarizadas linealmente. Si, por otro lado, los ángulos de fase son diferentes, entonces una partícula se mueve en una órbita elíptica alrededor de su posición de reposo (polarización elíptica); su velocidad angular es ω . Un caso especial de ondas polarizadas elípticamente se produce cuando la amplitud de onda de ambas componentes del desplazamiento son iguales ($\hat{\xi} = \hat{\eta}$) y $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi/2$. Entonces, la órbita de las partículas se convierte en un círculo (polarización circular) porque $\xi^2 + \eta^2 = \text{const.}$ siendo el sentido del desplazamiento horario o anti-horario dependiendo del signo de la diferencia de fase. La Figura 3.2 muestra diferentes tipos de polarización de ondas transversales.

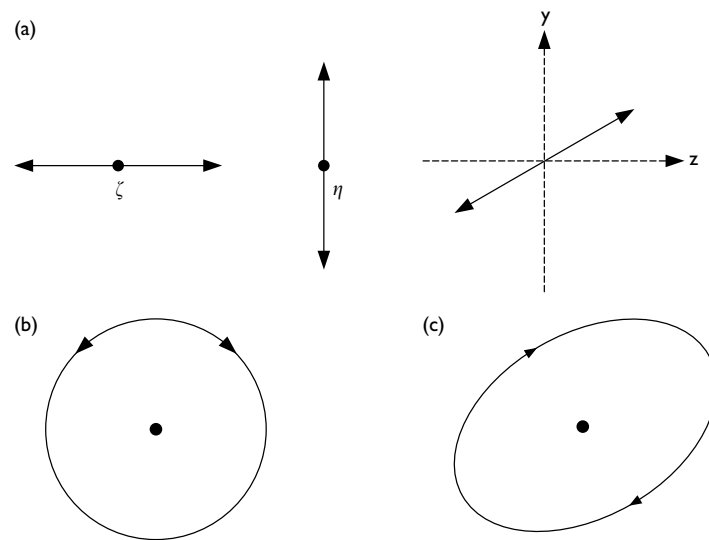


Figura 3.2. Polarización de ondas transversales: a) polarización lineal;
b) polarización circular, sentido horario o anti-horario;
c) polarización elíptica

Volvamos al patrón de deformación de una onda transversal mostrado en la Figura 3.1b, siendo $z=0$ el plano del papel que también contiene la dirección del movimiento. De acuerdo con las ecuaciones (2.21) y (2.22) σ_{xy} es la única componente de esfuerzo elástico que no desaparece, es decir, no existen fuerzas perpendiculares al plano del papel. Por tanto, el campo sonoro ilustrado no se verá influenciado por superficies libres paralelas al plano $z=0$. A partir de este hecho podemos concluir que las ondas planas transversales pueden propagarse en placas de cualquier grosor y que las mismas viajan con la misma velocidad que en un cuerpo ilimitado.

Además, las ondas transversales puras se pueden propagar en barras de sección circular o en tubos circulares. En este caso secciones transversales adyacentes rotan una respecto a la otra. Estas ondas también son conocidas como ondas de torsión. La Figura 3.3 muestra una onda de torsión en una barra cilíndrica. Obviamente, no existe desplazamiento radial o axial y la velocidad de onda viene dada de nuevo por la ecuación (3.5).

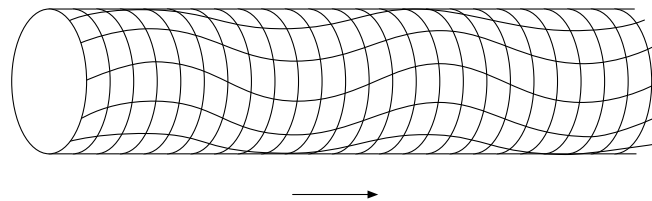


Figura 3.3. Onda de torsión en una barra cilíndrica

Con el paso del tiempo se han desarrollado numerosos métodos de precisión para la medición de la velocidad de varios tipos de onda, los cuales pueden ser utilizados para determinar las constantes de Lamé λ y μ , así como otras constantes elásticas relacionadas con las mismas (ver sección 3.2.1), incluso a partir de muestras pequeñas. De igual modo se pueden determinar con exactitud las constantes elásticas de sólidos anisótropos, como los cristales.

3.2 Ondas en placas y barras

Las ondas de volumen tratadas en el Apartado 3.1, es decir, las ondas de compresión y las ondas de corte, son de particular interés en la tecnología de ultrasonidos. Y es que a frecuencias ultrasónicas las longitudes de onda se encuentran a menudo en el rango de los milímetros, por lo que incluso un cuerpo de tamaño moderado, por ejemplo una pieza de material o un componente de maquinaria, se puede considerar como prácticamente ilimitado. Por el contrario, en el rango del sonido audible, la propagación de ondas en barras y placas presenta un mayor interés práctico. Algunos ejemplos son las ondas sonoras en paredes y techos de edificios, en componentes de maquinaria y también en determinados instrumentos musicales. Un tipo de estas ondas ya se ha mencionado, son las ondas de corte puras u ondas transversales. Y a lo largo del presente capítulo se tratarán más tipos de onda.

Salvo que se indique lo contrario, asumimos que las placas y barras en cuestión están compuestas de algún material isótropo, que su extensión es infinita y

que ninguna fuerza externa actúa sobre ellas. Esta condición significa particularmente que todos los esfuerzos de tracción o de corte en la dirección perpendicular a la superficie son cero.

3.2.1 Deformaciones elásticas: extensión y flexión

A modo de introducción para sucesivos apartados trataremos en esta sección algunos aspectos básicos de la elasticidad.

Si una barra se estira por la acción de una fuerza de tracción F , entonces su longitud l se incrementará en una determinada cantidad δl (véase la Figura 3.4a). Dentro de ciertos límites el cambio relativo de longitud es proporcional a la fuerza por unidad de área (ley de Hooke):

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{F}{S} \quad (3.8)$$

donde S es el área de la sección transversal de la barra; Y es una constante material denominada módulo de Young. Además de la extensión, la barra experimenta una reducción de todas sus dimensiones laterales, es decir, se hace más delgada, siendo el grosor relativo una determinada fracción del incremento relativo de longitud. Este cambio en las dimensiones laterales se conoce como contracción lateral. Para una barra cilíndrica de radio a , por ejemplo, tenemos:

$$\frac{\delta a}{a} = -\nu \frac{\delta l}{l} \quad (3.9)$$

La constante ν es el llamado coeficiente de Poisson, depende del tipo de material y su valor se encuentra en el rango de 0 a 0.5.

Si hacemos coincidir el eje de la barra con el eje x del sistema de coordenadas rectangular, el esfuerzo de tracción axial se designa por σ_{xx} , de acuerdo a lo estipulado en el Apartado 2.1. De este modo, la ecuación (3.8) es equivalente a

$$\sigma_{xx} = Y \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3.10)$$

La derivada en el lado derecho es la denominada elongación, esto es, la expresión diferencial del cambio relativo de longitud de la barra.

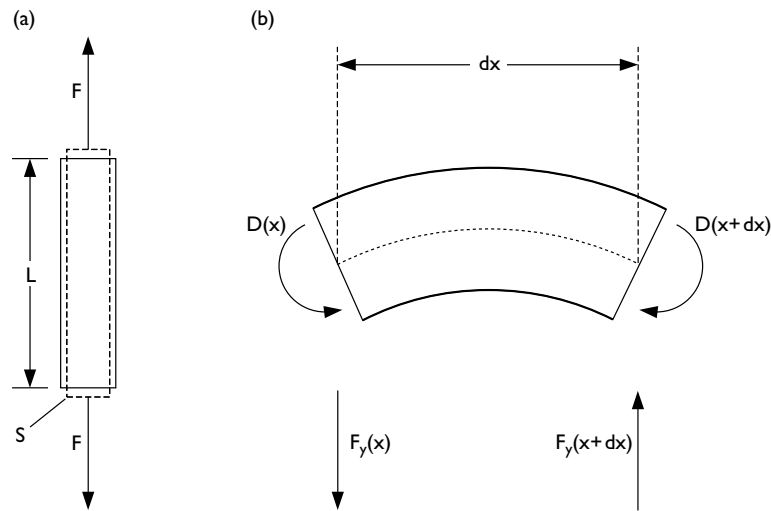


Figura 3.4. Deformaciones elásticas: a) extensión y contracción lateral;
b) flexión

Otro tipo de deformación elemental en barras o placas es la flexión, tal y como se muestra en la Figura 3.4b. La capa de material en el medio permanece inalterada cuando la barra o placa está flexionada; esta capa es la denominada fibra neutra. Por debajo de ella el material se comprime mientras que se estira en la mitad superior o viceversa. Los esfuerzos axiales se combinan generando un momento D que actúa sobre ambas secciones transversales, separadas una distancia dx . Este momento depende del grado de flexión, o más precisamente, es proporcional al radio de curvatura que aproximadamente equivale a la segunda derivada del desplazamiento η respecto a x :

$$D = -B \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

El factor de proporcionalidad B es la rigidez a la flexión de la barra o de la placa, y depende de sus dimensiones así como de las propiedades elásticas del material. Puesto que estamos principalmente interesados en la flexión de placas, es útil referir tanto el momento como la rigidez a la flexión a la unidad de espesor de la placa. Así, la rigidez a la flexión de la placa viene dada por:

$$B = \frac{d^3}{12} \cdot \frac{Y}{1 - \nu^2} \quad (3.12)$$

donde d designa su espesor.

Si el grado de flexión varía con x , lo mismo ocurre con el momento D . Puesto que el momento $D(x+dx)$ en la sección transversal derecha de la Figura 3.4b puede diferir de aquel en la sección transversal izquierda $D(x)$, la diferencia

$$D(x+dx) - D(x) = \frac{\partial D}{\partial x} dx \quad (3.13)$$

debe mantenerse en equilibrio mediante un par de fuerzas laterales $\pm F_y$ separadas una distancia dx :

$$-F_y dx = \frac{\partial D}{\partial x} dx \quad (3.14)$$

Como la fuerza lateral F_y es también función de x , cada elemento de longitud está asociado con una fuerza diferencial

$$dF_y = F_y(x+dx) - F_y(x) = \frac{\partial F_y}{\partial x} dx \quad (3.15)$$

Combinando esta ecuación con las ecuaciones (3.14) y (3.11) obtenemos el siguiente resultado:

$$dF_y = B \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} dx \quad (3.16)$$

Dicho diferencial debe ser equilibrado de algún modo, por ejemplo, mediante fuerzas externas (las cuales excluimos en este análisis) o por fuerzas de inercia, como veremos más adelante en la sección 3.2.3.

Las constantes elásticas Y y ν están relacionadas con las constantes de Lamé introducidas en el Apartado 2.3. Estas relaciones son:

$$\mu = \frac{Y}{2(1+\nu)} \quad (3.17)$$

$$\lambda = \frac{\nu Y}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.18)$$

La constante μ es igual al módulo de corte o módulo de torsión G frecuentemente utilizado en elasticidad técnica. Introduciendo estas relaciones en las ecuaciones (3.4) y (3.5) se demuestra que la relación entre c_L y c_T depende únicamente del coeficiente de Poisson:

$$\left(\frac{c_L}{c_T}\right)^2 = 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} \quad (3.19)$$

En la Tabla 3.1 se indica el módulo de Young y el coeficiente de Poisson de algunos materiales.

Material	Densidad (kg/m ³)	Módulo de Young (10 ¹⁰ N/m ²)	Coeficiente de Poisson
Aluminio	2700	6.765	0.360
Latón (70% Cu, 30% Zn)	8600	10.520	0.370
Acero	7900	19.725	0.300
Vidrio ('Flint')	3600	5.739	0.220
Vidrio ('Crown')	2500	7.060	0.220
Plexiglas	1180	0.399	0.400
Polietileno	900	0.076	0.450

Tabla 3.1. Módulo de Young y coeficiente de Poisson de algunos sólidos

3.2.2 Ondas de extensión

En el apartado anterior se han tratado las deformaciones elásticas estáticas o cuasi-estáticas en una barra o placa. Si, por el contrario, las deformaciones tienen lugar de forma dinámica a una velocidad finita, entonces no sólo la elasticidad del material juega un papel fundamental a la hora de determinar lo que ocurre, sino que también se debe considerar su inercia. Para ello, se establece un equilibrio de fuerzas similar al de la ecuación (2.6). El resultado puede obtenerse de forma inmediata sustituyendo la presión sonora p por el esfuerzo de tracción (negativo) σ_{xx} . Además, llevando a cabo el mismo proceso de linealización que en el Apartado 2.2, esto es, reemplazando la aceleración total por la aceleración local y la densidad total ρ_t por su valor medio ρ_0 , obtenemos:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

Combinando esta relación con la ecuación (3.10) se obtiene la siguiente ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{Y} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3.21)$$

Al comparar esta ecuación con las ecuaciones de onda anteriores, por ejemplo, con la ecuación (2.24), llegamos a la conclusión de que la velocidad de onda de las ondas de extensión en una barra es

$$c_{E1} = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0}} \quad (3.22)$$

La solución general de dicha ecuación de onda es de la forma:

$$p(x,t)=f(x-ct)+g(x+ct) \quad (3.23)$$

De forma similar puede deducirse la propagación de ondas de extensión en placas ilimitadas con límites paralelos. Su velocidad de onda resulta ser

$$c_{E2} = \sqrt{\frac{Y}{\rho_0(1 - \nu^2)}} \quad (3.24)$$

Esta es ligeramente superior a c_{E1} debido a que la fuerza elástica en una barra es menor que en una placa donde el alivio del esfuerzo debido a la contracción lateral sólo puede tener lugar en una dirección, la perpendicular a las superficies de la placa. A partir de las ecuaciones (3.17) y (3.18), se puede verificar fácilmente que

$$c_L > c_{E2} > c_{E1} > c_T \quad (3.25)$$

La Figura 3.5a muestra las deformaciones asociadas a una onda de extensión viajando horizontalmente. Debido a la contracción lateral el movimiento de las partículas del material no es puramente longitudinal, sino que también existen componentes del desplazamiento perpendiculares a la superficie. La barra o placa es más gruesa donde la compresión longitudinal del material es máxima. Por tanto, las ondas de extensión no son puramente ondas longitudinales aunque el desplazamiento longitudinal prevalece. Así, habitualmente se denominan ondas cuasi-longitudinales.

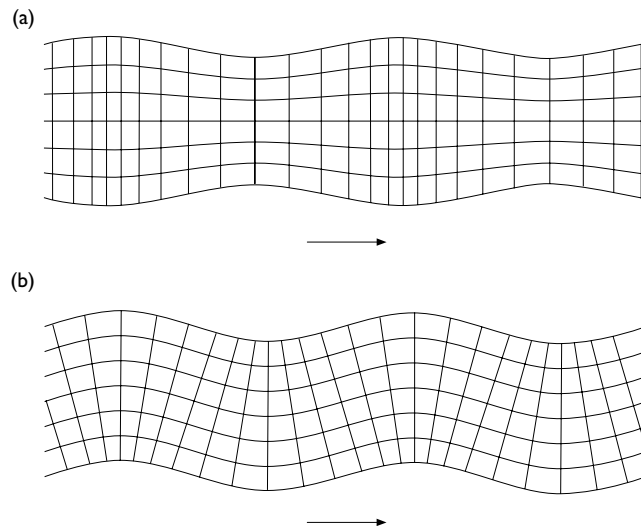


Figura 3.5. a) Onda de extensión (onda cuasi-longitudinal);
b) onda de flexión

Las ecuaciones (3.22) y (3.24) son válidas siempre que el espesor de la barra o de la placa sea pequeña en comparación con la longitud de onda de la onda de extensión. Si no es el caso, la velocidad de las ondas de extensión depende del espesor de la barra o de la placa y también de la frecuencia, es decir, la onda estará sujeta a dispersión.

3.2.3 Ondas de flexión

La excitación de ondas puras transversales o de extensión en una placa requiere de medidas y precauciones particulares que garanticen que el tipo de vibración inducida en la placa se corresponden exactamente con el tipo de onda deseado. La onda de flexión, sin embargo, es la onda de la placa per se; si se golpea un panel con un martillo se generan ondas de flexión casi puras.

La transición de deformaciones estáticas de flexión, como se ha descrito en el Apartado 3.2.1, a ondas de flexión requiere de la consideración de fuerzas de inercia. Estas deben compensar la fuerza transversal dF_y descrita en dicho apartado. Empleando la masa específica $m' = \rho_0 d$ de la placa, también denominada densidad superficial, el balance de fuerzas es el siguiente:

$$m' dx \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{\partial F_y}{\partial x} dx = 0 \quad (3.26)$$

o utilizando la ecuación (3.16):

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \frac{m'}{B} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.27)$$

Su extensión a dos dimensiones resulta:

$$\Delta \Delta \eta + \frac{m'}{B} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0 \quad (3.28)$$

donde $\Delta \Delta \eta$ es lo mismo que $\Delta(\Delta \eta)$. Ambas ecuaciones, (3.27) y (3.28), resultan tener soluciones de carácter ondulatorio a pesar de que son de cuarto orden respecto a las variables espaciales, en contraste con las ecuaciones de onda tratadas hasta ahora. Consecuentemente, esperamos una mayor variedad de soluciones posibles y también de variables independientes. Mientras que en ondas de extensión sólo existen dos variables independientes, una componente del desplazamiento, por ejemplo ξ (o su derivada temporal, la velocidad de la partícula v_x), y el esfuerzo σ_{xx} ; existen cuatro en una onda de flexión, el desplazamiento η perpendicular a la placa (o la correspondiente velocidad de la partícula v_y), su derivada espacial y , además, dos magnitudes relacionadas con la fuerza, el momento de flexión D y la fuerza transversal F_y . Este mayor número de variables se corresponde a una mayor variedad de condiciones de contorno.

Para mantener una matemática sencilla, consideraremos una onda armónica plana de flexión propagándose en la dirección x con un número de onda k_B :

$$\eta(x, t) = \hat{\eta} \cdot e^{j(\omega t - k_B x)} \quad (3.29)$$

Antes de insertar esta expresión en la ecuación (3.27) conviene mencionar que cada derivada temporal equivale a multiplicar la variable η por un factor $j\omega$ mientras que cada derivada espacial corresponde a un factor $-jk_B$. Esto nos lleva inmediatamente a $k_B^4 = \omega^2 m' / B$ o $k_B^2 = \pm \omega \sqrt{m' / B}$. Para el signo positivo obtenemos:

$$(k_B)_{1,2} = \pm \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{B}} \quad (3.30)$$

mientras que para el signo negativo:

$$(k_B)_{3,4} = \pm j \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{B}} \quad (3.31)$$

Los números de onda de la ecuación (3.30) corresponden a ondas viajando en sentido positivo o negativo de la dirección x . No son proporcionales a la frecuencia angular ω , por lo que la velocidad de onda depende de la frecuencia:

$$c_B = \frac{\omega}{k_B} = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \quad (3.32)$$

Estas son las características de la dispersión. En consecuencia, la forma de una onda no se preserva a lo largo de la propagación. En otras palabras, la solución general no es del tipo de la ecuación (3.23). Exactamente, la velocidad de onda en la ecuación (3.32) es la velocidad de fase; la velocidad de grupo de la onda de flexión es:

$$c'_B = \frac{d\omega}{dk_B} = 2\sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} = 2c_B \quad (3.33)$$

Sin embargo, las ecuaciones (3.30) a (3.33) sólo son válidas para frecuencias suficientemente bajas a las cuales la longitud de onda de la onda de flexión es grande en comparación con el espesor de la placa.

La Figura 3.5b muestra el patrón de deformación de una onda de flexión. Al igual que la onda de extensión no es puramente longitudinal sino que también contiene componentes transversales del desplazamiento, la onda de flexión no es puramente transversal; esto es, está asociada con desplazamientos relativamente pequeños paralelos a la dirección de propagación.

Consideremos ahora las soluciones $\eta(x,t)$ pertenecientes a los números de onda imaginarios $(k_B)_{3,4}$ en la ecuación (3.31). Introduciéndolas en la ecuación (3.29) se obtiene:

$$\eta(x,t) = \hat{\eta} \cdot e^{\pm x \sqrt{\omega^2 m' / B}} \cdot e^{j\omega t} \quad (3.34)$$

Esta expresión describe vibraciones con igual fase en cualquier punto y cuyas amplitudes aumentan o disminuyen exponencialmente con la distancia x . Al considerar la propagación de ondas de flexión libres en una placa infinita se pueden obviar con total seguridad estas soluciones de campo próximo. Son necesarias, sin embargo, en caso de que existan bordes en los cuales deban cumplirse ciertas condiciones de contorno (placa libre, fija, etc.). De igual modo deben tenerse en cuenta en las proximidades de una fuente o de heterogeneidades.

3.2.4 Radiación sonora de una placa vibrante

Tal y como se ha mencionado al comienzo del Apartado 3.2, el tratamiento de las ondas de extensión y de flexión está basado en el supuesto de que no actúa ninguna fuerza sobre la superficie de la barra o de la placa. Estrictamente hablando, esto significa que los cuerpos sólidos no están rodeados por un medio que pueda interactuar con la vibración del mismo. Esta suposición se puede omitir sin riesgo si las ondas transversales son del tipo detallado en el Apartado 3.1, ya que estas ondas no están asociadas con desplazamientos perpendiculares a la superficie. Del mismo modo, los desplazamientos normales que tienen lugar en las ondas de extensión, como hemos comentado en la sección 3.2.2, son tan pequeños que se puede excluir cualquier interacción significativa, al menos si la barra o la placa se encuentra rodeada por un medio gaseoso. Esto no es así con las ondas de flexión, donde el desplazamiento lateral es predominante. Incluso si la influencia del medio gaseoso en la propagación de las ondas de flexión es despreciable, el desplazamiento lateral de la placa conduce a una radiación sonora significativa al medio adyacente, al menos en determinadas circunstancias.

Para encontrar dichas circunstancias nos fijaremos en la Figura 3.6a, donde se muestra una placa por la que se propaga una onda de flexión; se asume que el medio circundante es aire. Cualquier onda sonora emitida por la placa debe ser una onda plana. Además, la periodicidad de la onda sonora en el aire debe concordar con aquella de la onda de flexión en la superficie de la placa. Este hecho se denomina coincidencia. Sea ϑ el ángulo entre la dirección de radiación y la normal de la placa. Entonces, a partir de la figura, y con $\lambda_B = 2\pi/k_B$, observamos que:

$$\sin \vartheta = \frac{\lambda}{\lambda_B} = \frac{c}{c_B} \quad (3.35)$$

Esta ecuación se respalda en que tanto la onda radiada como la onda de flexión tienen la misma frecuencia, y únicamente tiene sentido si la velocidad de fase c_B de la onda de flexión es mayor que la velocidad del sonido en el aire. Puesto que, de acuerdo a la ecuación (3.32), la primera crece con la raíz cuadrada de la frecuencia, existirá una frecuencia crítica ω_c por debajo de la cual la placa no emitirá ondas sonoras. Dicha frecuencia crítica se determina estableciendo $c_B = c$ en la ecuación (3.32), y resolviendo la frecuencia angular:

$$\omega_c = c^2 \sqrt{\frac{m'}{B}} \quad (3.36)$$

o, dividiendo dicha ecuación por 2π e introduciendo la rigidez a la flexión de la ecuación (3.12):

$$f_c = \frac{c^2}{\pi} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)m'}{Yd^3}} \quad (3.37)$$

Así, la frecuencia crítica es particularmente alta para placas pesadas y delgadas hechas de un material con bajo módulo de Young.

Eliminando el término B/m' de las ecuaciones (3.32) y (3.36), la velocidad de fase de la onda de flexión también se puede representar como:

$$c_B = c \sqrt{\frac{\omega}{\omega_c}} = c \sqrt{\frac{f}{f_c}} \quad (3.38)$$

La intensidad de la onda radiada al aire se puede deducir a partir del requisito que establece que la velocidad $j\omega\eta$ de la placa debe igualar la componente normal de la velocidad del aire en la superficie de la placa:

$$j\omega\eta = v_y(y=0) = \frac{p}{Z_0} \cdot \cos \vartheta \quad (3.39)$$

Comparando las ecuaciones (3.35), (3.38) y (3.39) obtenemos la siguiente expresión para la presión sonora radiada al aire:

$$p = \frac{j\omega Z_0 \eta}{\sqrt{1 - \omega_c/\omega}} \quad (3.40)$$

y para la intensidad sonora de la onda aérea:

$$I = \frac{\hat{\eta}^2}{2} \cdot \frac{\omega^3 Z_0}{\omega - \omega_c} \quad (3.41)$$

A partir de esta última ecuación resulta evidente una vez más que una placa de extensión infinita no radia sonido por debajo de su frecuencia crítica. En cambio, las diferencias de presión y densidad producidas por el desplazamiento de la placa inducirán flujos de aire locales como se ilustra en la Figura 3.6b.

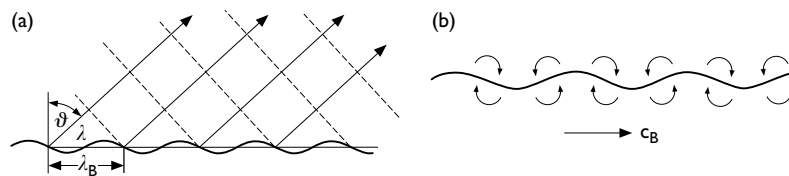


Figura 3.6. Reacción del aire adyacente a una onda de flexión en una placa:

- a) por encima de la frecuencia crítica: radiación de una onda sonora;
- b) por debajo de la frecuencia crítica: flujos de aire locales

Las frecuencias críticas de diferentes tipos de placas varían en un amplio rango de valores, en su mayoría, dentro del rango de frecuencias audibles. Por ejemplo, una pared de ladrillo macizo de 24 cm de espesor tiene una frecuencia crítica alrededor de 100 Hz, mientras que para una placa de acero de 1 mm ronda de 12 kHz. Este último ejemplo parece contradecir cualquier experiencia ya que una placa fina de acero produce sonidos fuertes con frecuencias que cubren todo el rango de audio cuando se golpea con un martillo. Esta contradicción se debe al hecho de que las leyes deducidas con anterioridad sólo son válidas para placas de extensión infinita. Las placas reales a menudo tienen los bordes libres, siendo el significado de libre no sólo la ausencia de fuerzas externas sino también de momentos actuando en los bordes. La última condición significa que, de acuerdo a la ecuación (3.11), la segunda derivada de la elongación η es cero a lo largo del borde; mientras que la primera condición es equivalente a que la tercera derivada de la elongación η también sea cero, de acuerdo a las ecuaciones (3.14) y (3.11). Estas condiciones no pueden satisfacerse sólo por dos ondas de flexión, una en sentido positivo de la dirección x y la otra en sentido negativo. Se requieren soluciones adicionales que representan el campo próximo, esto es, soluciones con $(kB)_{3,2}$ después de la ecuación (3.31), y son estas últimas las responsables de la radiación de sonido audible incluso a frecuencias por debajo de la frecuencia crítica. Sin embargo, incluso para placas finitas la radiación por encima de la frecuencia crítica es considerablemente mayor que en el rango de frecuencias por debajo de la misma.

3.2.5 Pérdidas internas

Al deformar un cuerpo sólido, este almacena energía elástica. Cuando este proceso se invierte, no toda esa energía puede recuperarse como energía mecánica, una parte se pierde en forma de calor. En ondas elásticas, estas pérdidas de energía tienen lugar de forma periódica y provocan una atenuación de las mismas. En la actualidad, las pérdidas por deformación constituyen el principal tratamiento a considerar. Pueden tenerse en cuenta introduciendo el módulo complejo de Young:

$$\underline{Y} = Y' + jY'' = Y'(1 + j\eta) \quad (3.42)$$

Un tratamiento similar se puede aplicar al resto de constantes elásticas y las magnitudes relacionadas con ellas, incluida la rigidez a la flexión, ya que todas están vinculadas al módulo de Young a través relaciones lineales. La constante η se denomina factor de pérdidas, y depende de la frecuencia. Su importancia en la propagación de ondas de extensión se hace evidente al expresar el número de onda a partir de la velocidad de onda haciendo uso de las ecuaciones (3.24) o (3.25) e introducirlo en la ecuación (3.42):

$$\underline{k_E} = \frac{\omega}{\underline{c_E}} = \frac{\omega}{\sqrt{\underline{Y}/\rho_0}} = \frac{\omega}{\sqrt{Y'(1 + j\eta)/\rho_0}} \quad (3.43)$$

Asumiendo que $\eta \ll 1$ y sustituyendo la raíz cuadrada por su desarrollo en serie de potencias truncado a partir del segundo término:

$$\underline{k_E} \approx \frac{\omega}{\sqrt{Y'/\rho_0}} \left(1 - j\frac{\eta}{2}\right) = k_E \left(1 - j\frac{\eta}{2}\right) \quad (3.44)$$

Entonces, el factor de onda $\exp(-jk_E x)$ resulta:

$$e^{-jk_E x} = e^{-k_E \eta x/2} \cdot e^{-jk_E x} \quad (3.45)$$

A partir de esta expresión podemos establecer que la constante de atenuación relacionada con la intensidad es:

$$m_E = k_E \eta = \frac{2\pi}{\lambda_E} \eta \quad (3.46)$$

Esta relación se cumple también para otro tipo de ondas como, por ejemplo, las ondas de torsión; tan sólo hay que sustituir el subíndice E por T . Para ondas de flexión, sin embargo, el número de onda es inversamente proporcional a la raíz cuarta de la rigidez a la flexión –véase ecuación (3.29)- y, por tanto, del módulo de Young. Así, en lugar de la ecuación (3.44) tenemos:

$$\underline{k_B} = k_B \left(1 - j \frac{\eta}{4}\right) \quad (3.47)$$

y la constante de atenuación resulta:

$$m_B = \frac{1}{2} k_B \eta = \frac{\pi}{\lambda_B} \eta \quad (3.48)$$

A pesar de la diferencia por un factor de 2, esta constante de atenuación es mayor que aquella de la onda de extensión ya que λ_B es mucha más pequeño que λ_E .

Experimentalmente, el factor de pérdidas se determina fundamentalmente a partir de un sistema resonante masa-muelle fabricado con el material bajo ensayo. En principio, no importa si el muelle responde a flexión, torsión o un cambio en su longitud. En cualquier caso, su compliancia es inversamente proporcional al módulo de Young y, por tanto, es compleja:

$$\frac{1}{\underline{n}} = a \cdot \underline{Y} = a \cdot Y' (1 + j\eta) \quad (3.49)$$

donde a es una constante. De este modo, la frecuencia de resonancia también es compleja:

$$\underline{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{m \underline{n}}} = \sqrt{\frac{a Y'}{m}} \left(1 + j \frac{\eta}{2}\right) = \omega_0 \left(1 + j \frac{\eta}{2}\right) \quad (3.50)$$

donde la raíz cuadrada de $1+j\eta$ se ha aproximado por $1+j\eta/2$, como anteriormente. Si introducimos esta expresión en la exponencial típica para la vibración armónica obtenemos:

$$e^{-j \underline{\omega_0} t} = e^{-\omega_0 \eta t / 2} \cdot e^{-j \omega_0 t} \quad (3.51)$$

es decir, una vibración amortiguada con una constante de decaimiento

$$\delta = \omega_0 \eta / 2 \quad (3.52)$$

que puede observarse fácilmente y utilizarse para determinar η . De forma alternativa, el factor de pérdidas se puede obtener a partir del factor de calidad Q de la resonancia. De acuerdo con la ecuación, ambas magnitudes están relacionadas por:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{\eta} \quad (3.53)$$

En la Tabla 3.II se muestra el factor de pérdidas de algunos materiales ampliamente utilizados en la construcción. No obstante, estos datos deben considerarse sólo aproximados. En particular, el factor de pérdidas de grandes polímeros es a menudo fuertemente dependiente de la temperatura y de la frecuencia.

Material	η	Comentarios
Aluminio	0.0001	
Hierro	0.0002-0.0006	
Vidrio	0.0006-0.002	
Panel de yeso	0.006	
Cemento duro	0.004-0.008	
Cemento poroso	0.01	
Ladrillo	0.0028	
Madera de pino	0.008	
Madera de abeto	0.011-0.013	
Madera contrachapada	0.013	
Plexiglas	0.02-0.04	
Plomo	0.02	
Asfalto	0.06	13°C con 8.5% bitumen duro
	0.4	23°C con 10% bitumen suave
Corcho	0.13	Normal
	0.39	Suave
Goma india	0.1	
Caucho vulcanizado	1	60°C, 40 Hz
Poliestireno	2	140°C, 2kHz

Tabla 3.II. Factor de pérdidas de algunos materiales empleados habitualmente en la construcción.

4 Ondas mecánicas en placas

Hasta ahora hemos tratado los diferentes tipos de ondas mecánicas y su propagación en sólidos. A lo largo de este capítulo nos centraremos en el estudio de las ondas de flexión en placas, considerando los efectos del medio fluido adyacente. De los diversos tipos de onda que pueden propagarse en barras, vigas y placas, las ondas de flexión son las de mayor importancia en el proceso de interacción estructura-fluido en las frecuencias de audio. Las razones son que las ondas de flexión implican desplazamientos sustanciales en una dirección transversal a la dirección de propagación, que efectivamente puede perturbar un fluido adyacente; y que la impedancia transversal de las estructuras que transportan ondas de flexión puede ser de una magnitud similar a la de las ondas de sonido en el fluido adyacente, lo que facilita el intercambio de energía entre ambos medios.

4.1 Ondas forzadas de flexión y coincidencia

Como ya hemos comentado en el apartado 3.2.3, la ecuación de onda de flexión para una placa de extensión infinita en la dirección y (ignorando la reacción del medio adyacente), siendo por tanto la dirección x perpendicular a la placa, viene dada por:

$$-B \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} = m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

Esta ecuación es igualmente válida para la velocidad v tras una diferenciación adicional con respecto al tiempo (el cual es independiente de la localización), la cual se adecúa mejor a problemas acústicos:

$$-B \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.2)$$

El término “ecuación de onda de flexión” se corresponde al hecho de que la restricción de dicha ecuación a tonos puros

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{\omega^2 m}{B} v = 0 \quad (4.3)$$

resulta en cuatro tipos de soluciones:

$$\underline{v} \sim e^{-jk_B y}; e^{+jk_B y}; e^{-k_B y}; e^{+k_B y} \quad (4.4)$$

de las cuales las dos primeras representan ondas sinusoidales propagándose en las direcciones +x y -x. Aquí obtenemos para el número de onda de flexión:

$$k_B = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{m}{B}} \quad (4.5)$$

El hecho de que la ecuación de onda de flexión) es (como la ecuación de onda habitual) sólo de segundo orden con respecto al tiempo pero de cuarto orden con respecto al espacio resulta en que el número de onda aquí no es proporcional a la frecuencia, como en las ecuaciones de onda normales, sino a su raíz cuadrada.

Por tanto, la longitud de onda λ_B de las ondas de flexión no es inversamente proporcional a la frecuencia, sino a su raíz cuadrada:

$$\lambda_B = \frac{2\pi}{k_B} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{B}{m}} = \sqrt{\frac{2\pi h c_{LP}}{\sqrt{12} f}} = \sqrt{\frac{1.8 h c_{LP}}{f}} \quad (4.6)$$

En la ecuación anterior m es sustituida por ρh (siendo ρ la densidad volumétrica y h el espesor de la placa), y la velocidad de propagación de ondas cuasi-longitudinales en placas se introduce como una cantidad específica del material.

El hecho de que la longitud de la onda de flexión no sea proporcional al espesor de la placa puede parecer contradictorio. Sin embargo, la expresión en la raíz cuadrada incluye también otra longitud, concretamente la longitud de onda de la onda longitudinal λ_{LP} .

Si multiplicamos la longitud de onda λ_B por la frecuencia, obtenemos la velocidad de propagación para ondas sinusoidales de flexión:

$$c_B = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{B}{m}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{12}}} c_{LP} h f = \sqrt{1.8 c_{LP} h f} \quad (4.7)$$

Puesto que depende de la frecuencia, no podemos esperar una propagación no distorsionada para cualquier tipo de forma de onda arbitraria, tan sólo para ondas

sinusoidales. Así, la ecuación () no es característica de una onda espacial y temporalmente libre. La dependencia temporal es obligada, y su realización requiere la excitación sinusoidal en ondas planas a lo largo de una línea recta normal a la dirección de propagación. De acuerdo con Cremer [3], sería conveniente llamar a esta onda una onda-propia (del inglés ‘eigen-wave’) de la placa. No obstante, para una conexión más estrecha con las ondas comunes, cuando hablemos aquí de “ondas de flexión libres” nos referiremos a ondas sinusoidales que son “libres” únicamente respecto al espacio.

En contraste con esta “onda libre”, se producirá una onda forzada (respecto al tiempo y al espacio) si la placa es excitada por una onda sonora incidente con un ángulo de incidencia ϑ respecto a la normal, tal y como se muestra en la Figura 4.1.

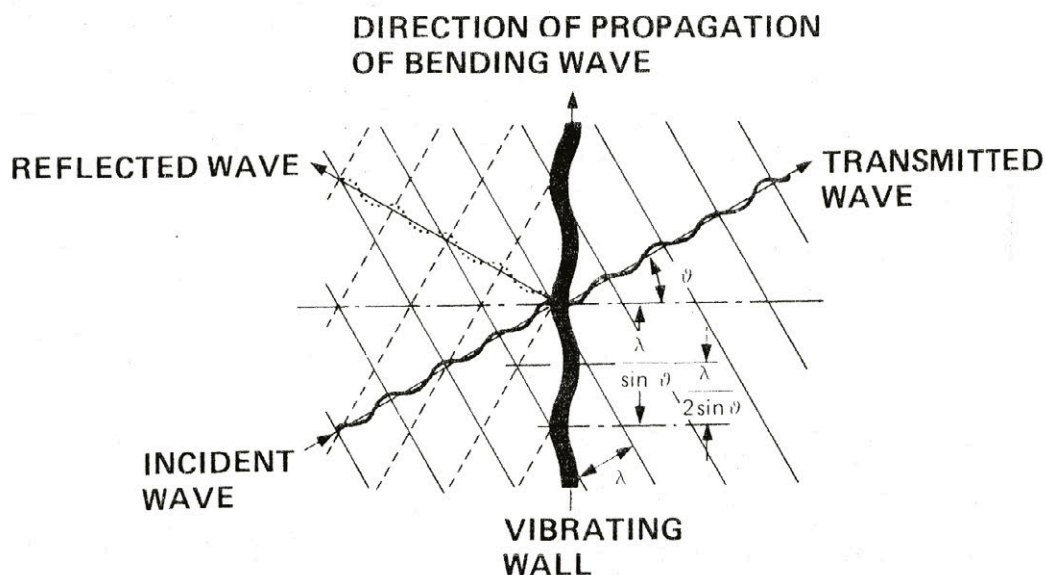


Figura 4.1. Diagrama del principio de transmisión sonora a través de una placa para incidencia oblicua

La onda plana incidente produce una deformación local en la placa, de forma que en aquellos puntos donde tienen lugar compresiones de la onda sonora sobre la placa, ésta se desplaza originando una depresión en la placa, correspondiendo a los mínimos de la onda de flexión. De forma análoga, donde se produce la expansión o el enrarecimiento de las partículas de aire, se genera una cresta en la placa correspondiendo con los máximos de las ondas de flexión.

La onda excitada en la placa toma no sólo la frecuencia de la excitación, sino también la traza de su longitud de onda:

$$v = j\omega\xi \sim e^{-j[(\omega/c)\sin\vartheta]y} \quad (4.8)$$

En este caso, debemos complementar además la ecuación dinámica que se aplica a un elemento de la placa con la diferencia de presión en ambos lados de la placa:

$$p_1 - p_2 - B \frac{\partial^4 \xi}{\partial y^4} = m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (4.9)$$

A partir de esta expresión, sustituyendo $j\omega\xi$ por \underline{v} e introduciendo la ecuación (4.8), obtenemos la ecuación temporal:

$$\underline{p}_1 - \underline{p}_2 = j \left(\omega m - \frac{B\omega^3}{c^4} \sin^4 \vartheta \right) \underline{v} \quad (4.10)$$

La impedancia de la placa, que aparece en el segundo término de esta expresión como el factor que precede a \underline{v} , consta de dos términos. El primer término representa la reactancia de la masa de la placa; el segundo representa la reactancia propia de la rigidez a la flexión de la misma, sólo aparece para incidencia oblicua y, al igual que la reactancia de la capa de aire, se encuentra en oposición de fase respecto a la reactancia de la masa. Así, estos dos componentes se pueden compensar completamente entre sí. Esto se produce cuando la velocidad de la onda sonora incidente es igual a la velocidad de propagación (también denominada velocidad de fase) de la correspondiente onda sinusoidal de flexión:

$$\frac{c}{\sin \vartheta} = \sqrt{\omega^4 \frac{B}{m}} = c_B \quad (4.11)$$

Dividiendo ambos lados por la frecuencia común, podemos también describir esta condición como la igualdad entre la traza de la longitud de onda y la longitud de la onda libre de flexión:

$$\lambda = \lambda_B \sin \vartheta \quad (4.12)$$

Este fenómeno de equidad entre la velocidad de propagación de la onda de flexión en la placa con la velocidad del sonido en el aire se denomina coincidencia. Representa un equivalente espacial de resonancia: la impedancia de la placa desaparece si el periodo temporal de excitación iguala a aquél de cualquier oscilación libre, lo cual es posible sin excitación estacionaria.

La desaparición de la impedancia de la placa significa la transmisión total de la onda sonora incidente. Pero, por diferentes motivos, esto nunca ocurre (y la transmisión de energía es máxima, pero no total). En primer lugar, como ocurre con las resonancias, se han de considerar las pérdidas; en segundo lugar, las señales que nos interesan raramente son tonos puros; en tercer lugar, el sonido no incide desde una única dirección; y, por último, la extensión lateral de las placas no es suficiente para alcanzar completamente una condición periódica espacial. Los mayores coeficientes de transmisión que se han medido, para placas de vidrio de 12 mm de espesor con $\vartheta=45^\circ$, son menores que 0.005. En lo que se refiere al aislamiento acústico este es, por supuesto, un valor bastante elevado. La pérdida de transmisión correspondiente es de sólo 23 dB, por lo que en este sentido es importante evitar los efectos del fenómeno de coincidencia. Pero para el problema de absorción sonora en acústica de salas, estos efectos no han tenido nunca una importancia decisiva.

Pero incluso en este caso sería mejor evitar, en lugar de fomentar, los efectos de la coincidencia, ya que aparecen de forma muy selectiva para frecuencias y ángulos de incidencia particulares. Al igual que en el caso de las resonancias, conviene “sintonizar” distintos elementos a diferentes frecuencias, y aquí, adicionalmente, proporcionar distribuciones angulares de las ondas reflejadas lo más isotrópicas posibles. Por tanto, puede ser conveniente variar el espesor de los techos de yeso extendidos.

La ecuación (4.11) permite extraer otra conclusión que resulta de gran importancia para el cálculo de la absorción de paneles de madera. Puesto que $\sin\vartheta$ no puede exceder la unidad, existe una frecuencia límite –denominada frecuencia crítica, f_c – por debajo de la cual no se puede producir el fenómeno de coincidencia:

$$f_c = \frac{2\pi}{c^2} \sqrt{\frac{m}{B}} \approx \frac{c^2}{1.8c_{LP}h} \quad (4.13)$$

Para los espesores de placa que resultan de interés en la acústica de salas, estas frecuencias se encuentran generalmente tan por encima de las resonancias de

interés que no sólo nunca tiene lugar el fenómeno de coincidencia en la región de resonancia, sino que también se puede despreciar el término de rigidez a la flexión en la ecuación (4.10) en comparación con la reactancia de la masa, predominando el carácter inercial de ésta. Para una placa de madera contrachapada con 1.5cm de espesor, la cual constituye un sistema resonante absorbente sintonizado a 100 Hz, la frecuencia crítica alcanzaría un valor de 1400 Hz. Así, en la teoría de placas lateralmente infinitas, podemos tratar los paneles del tipo empleado en revestimientos de madera como masas inertes, impermeables y flexibles e incluso, a pesar de su rigidez, emplear la ecuación (4.10) para calcular las resonancias, siempre y cuando no exista ningún límite lateral que lo modifique.

Material	Densidad (kg/m ³)	Frecuencia crítica (Hz) (material 1 cm. espesor)
Ladrillo macizo	1650	2380
Hormigón denso	2350	2100
Acero	7850	1000
Plomo	1300	5000
Madera-cemento	1200	5000
Cartón-yeso	875	4670
Vidrio	2500	1200
Madera aglomerada	750	2960
Madera pino	700	1670
Madera contrachapada	600	2075
Madera Flandes	640	1714
Caucho espumado	480	27078

Tabla 4.1. Frecuencias críticas estimadas para diversos materiales

4.2 Ondas libres de flexión en placas con límites fijos

La rigidez a la flexión de las placas es siempre considerable cuando estas están limitadas en sus extremos; su movimiento se ve entorpecido por la sujeción en dichos límites. Si se aplica una presión estática en la placa, siempre es la rigidez de la placa –apoyada o fija- en su conjunto de lo que nos percatamos. Es por esto que puede resultar sorprendente el hecho de que, como veremos ahora, en el margen de frecuencias de interés acústico (por ejemplo a las frecuencias donde las placas son grandes en comparación la longitud de la onda de flexión, pero aún por debajo de la frecuencia crítica) la influencia de la rigidez a la flexión, incluso en placas lateralmente limitadas, sigue siendo generalmente pequeña.

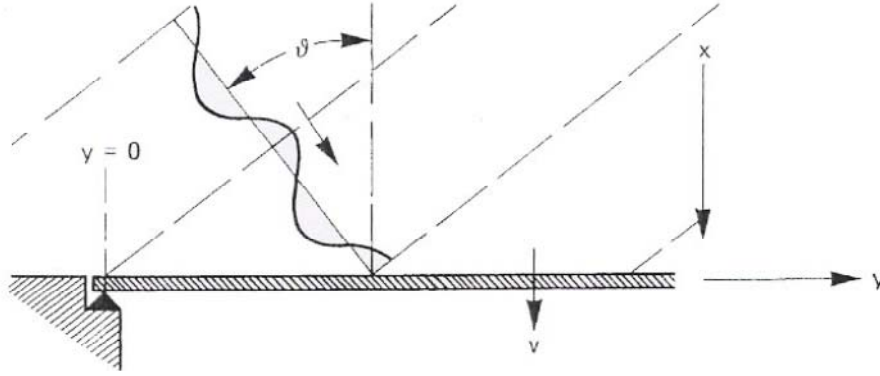


Figura 4.2. Placa semi-infinita apoyada en un extremo y excitada por una onda plana.

Comenzaremos por el caso más sencillo que nos permita demostrar esto. Sea una placa infinita en la dirección positiva del eje y , pero apoyada en una pared rígida en $y=0$ (ver Figura 4.2). Sobre la placa incide con un ángulo arbitrario ϑ una onda sonora con la amplitud de presión \hat{p}_+ . Para dicha placa a frecuencias bastante por debajo de la frecuencia crítica, de acuerdo con

$$\underline{p}_{1+} + \underline{p}_{1-} = \left(j\omega m - \frac{Z}{\cos \vartheta} \right) \underline{v}_1 \quad (4.14)$$

$$\underline{p}_{1+} - \underline{p}_{1-} = \frac{Z}{\cos \vartheta} \underline{v}_1 \quad (4.15)$$

donde

\underline{p}_{1+} y \underline{p}_{1-} son las amplitud de presión de las ondas incidentes que se propagan en las direcciones $y+$ e $y-$, respectivamente, y Z es la impedancia característica del aire; la presión sonora producirá una onda de flexión forzada que se propaga a lo largo de la placa con la traza de velocidad:

$$\underline{v}_1 = \frac{2\underline{p}_{1+}}{j\omega m + 2Z/\cos \vartheta} \quad (4.16)$$

Puesto que también tenemos la condición de contorno

$$y = 0: \quad v = 0 \quad (4.17)$$

debemos superponer un “movimiento libre”, que puede constar de cualquiera de las cuatro soluciones indicadas en la ecuación (4.16). Dado que la placa que se muestra en la Figura 4.2 se extiende infinitamente en la dirección $y+$, dos de esas soluciones son imposibles por razones físicas: la segunda solución, que representaría una onda incidente hacia la zona de apoyo de la placa desde $y=\infty$; y la cuarta, que crecería exponencialmente conforme aumenta la distancia al apoyo a lo largo del eje $y+$. En cambio, el movimiento libre v_2 estará compuesto de la suma de una onda que se propaga alejándose del soporte y un campo próximo cuasi-estacionario que decrece exponencialmente desde el límite:

$$\underline{v}_2 = \underline{v}_{2+} e^{-jk_B y} + \underline{v}_{2,-j} e^{-k_B y} \quad (4.18)$$

El índice $-j$ en el segundo término corresponde al factor con el cual $-jk_B$ ha de multiplicarse para obtener $-k_B$. Ambas componentes son necesarias ya que siempre se deben satisfacer dos condiciones frontera para ondas de flexión. La primera condición de contorno, definida por la ecuación (4.17), no especifica si la placa está fija o simplemente apoyada. Si la placa está apoyada, su pendiente puede ser distinta de cero en $y=0$; luego el momento de flexión desaparece, lo que, de acuerdo a la ecuación (3.11), implica la condición frontera:

$$y = 0: \quad \frac{d^2 v}{dy^2} = 0 \quad (4.19)$$

Pero si la placa está fija, su pendiente es cero en $y=0$, lo que supone la condición frontera:

$$y = 0: \quad \frac{dv}{dy} = 0 \quad (4.20)$$

En la práctica de la edificación, ninguno de estos casos extremos se cumple exactamente, no al menos para frecuencias acústicas. En la mayoría de los casos, las placas se atornillan o clavan al soporte sólo en algunos puntos. Pero incluso si la placa está firmemente pegada, los elementos adyacentes nunca son lo suficientemente rígidos para impedir alguna inclinación en el apoyo. En general, el caso de la placa apoyada será más cercano a la realidad que el de la placa fija. Además, puesto que estamos interesados fundamentalmente en el comportamiento de la placa, el caso de la placa simplemente apoyada es preferible por su mayor simplicidad en el cálculo matemático.

Las dos condiciones de contorno de las ecuaciones (4.17) y (4.19) producen para los vectores deseados \underline{v}_2 y $\underline{v}_{2,-j}$ las siguientes ecuaciones:

$$\underline{v}_{2+} + \underline{v}_{2,-j} = -\underline{v}_1 \quad (4.21)$$

$$k_B^2 (-\underline{v}_{2+} + \underline{v}_{2,-j}) = (k \sin \vartheta)^2 \underline{v}_1 \quad (4.22)$$

y a partir de estas, considerando que se hemos asumido $(k \sin \vartheta)^2 \ll k_B^2$, se obtiene:

$$\underline{v}_{2+} = -\frac{1}{2} \underline{v}_1 \left(1 + \left(\frac{k \sin \vartheta}{k_B} \right)^2 \right) \approx -\frac{1}{2} \underline{v}_1 \quad (4.23)$$

$$\underline{v}_{2,-j} = -\frac{1}{2} \underline{v}_1 \left(1 - \left(\frac{k \sin \vartheta}{k_B} \right)^2 \right) \approx -\frac{1}{2} \underline{v}_1 \quad (4.24)$$

Así, en el rango de frecuencias de interés (por debajo de la frecuencia crítica), los movimientos libres excitados son independientes del ángulo de incidencia. Se puede describir la solución general del movimiento mediante la siguiente expresión:

$$\underline{v} \approx \underline{v}_{10} \left(e^{-jk \sin \vartheta y} - \frac{1}{2} e^{-jk_B y} - \frac{1}{2} e^{-k_B y} \right) \quad (4.25)$$

En la Figura 4.3 se muestra la distribución del desplazamiento resultante $\xi(y)$ cerca del punto de apoyo para una incidencia sonora normal en tres instantes diferentes: en el momento de máximo desplazamiento forzado, en el momento cuando el desplazamiento forzado pasa por cero, y en un momento intermedio.

Como se puede observar, el hecho de apoyar la placa en un extremo ha cambiado significativamente la distribución de la vibración en la placa. Esto es debido a la onda de flexión libre que se origina en la misma, la cual no se limita sólo a las proximidades de la frontera.

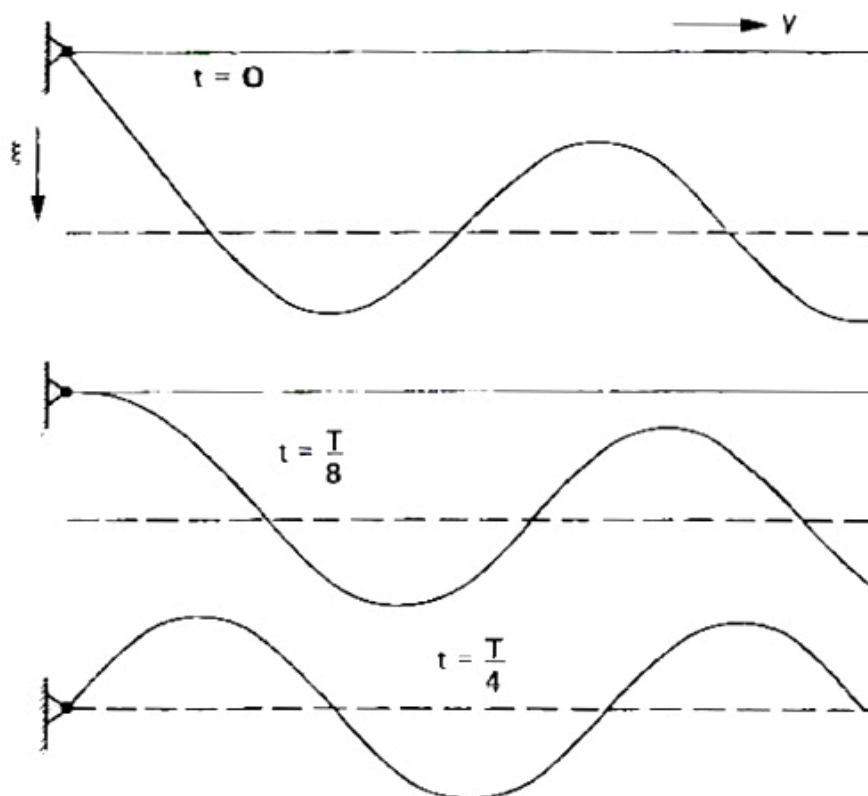


Figura 4.3. Desplazamiento resultante de la placa mostrada en la Figura 4.2 en las inmediaciones del soporte para incidencia normal del sonido. Arriba: $t=0$, momento de máximo desplazamiento forzado. Centro: $t=T/8$, desplazamiento intermedio. Abajo: $t=T/4$, desplazamiento forzado pasando por cero. El desplazamiento forzado se muestra por una línea discontinua en cada caso.

4.3 Placas de dimensión finita

El movimiento de una placa de dimensión finita está influenciado por la existencia de límites en los extremos de la misma. Para frecuencias bajas, caso en el que estamos más interesados, tan pronto como las ondas de flexión libres alcanzan el otro extremo con sólo una pequeña atenuación, estas son reflejadas y llegan al extremo original, de nuevo para volver a ser reflejadas, y este proceso se repite hasta que se hacen insignificamente pequeñas.

En este proceso, también se producen pérdidas debido a las reflexiones en los límites. Para ilustrar esta afirmación, basta observar durante cuánto tiempo se extiende la reverberación de una placa metálica cuando se suspende libremente en comparación con el corto tiempo de reverberación cuando esta se encuentra fija en

sus bordes. Esta absorción sonora en los límites se basa no sólo en la transmisión de energía a componentes estructurales adyacentes, sino también en la disipación por el amortiguamiento debido a la fricción seca entre superficies contiguas prensadas una contra la otra.

En general, las pérdidas en ondas de flexión en los límites de la placa son mucho mayores que aquellas que se producen durante la propagación. Dado que la atenuación debida al factor de reflexión r sólo ocurre una vez que la onda ha recorrido el camino L , los dos tipos de pérdidas pueden compararse sobre la base de los factores:

$$r = e^{-\ln(1/r)} \quad y \quad e^{-k_B \eta L/4} \quad (4.26)$$

A partir de estas expresiones, puede deducirse que un factor de reflexión menor que la unidad tiene el mismo efecto que un incremento del factor de pérdidas de:

$$\Delta \eta = \frac{4}{k_B L} \ln \frac{1}{r} \quad (4.27)$$

El valor de r puede reducirse fácilmente de 1 a 0.9 (lo que correspondería a un coeficiente de absorción para ondas de flexión de 0.19). Si establecemos $k_B L = \pi$ en la ecuación (4.27), que corresponde, como veremos en la ecuación (4.29), a la frecuencia propia de flexión más baja, obtenemos el valor $\Delta \eta = 0.13$, mucho mayor que los factores de pérdida para materiales de construcción presentados en la Tabla 3.II.

Cualquiera que sean las condiciones de contorno, siempre pueden describirse por un factor de reflexión complejo $re^{j\psi}$, que en problemas de propagación de ondas sonoras en estructuras se relaciona, por conveniencia, con la velocidad.

Así, tenemos aquí la superposición de una onda que se propaga, en este caso dos ondas enfrentadas, y la serie infinita de sus reflexiones. Esto resulta en el fenómeno de resonancia, que se produce cuando una onda, tras recorrer un camino cerrado en un sistema, llega a su punto de partida en fase con la onda que sale en ese instante:

$$\underline{v}_{2+(0)} \left(1 + r^2 e^{-j(2k_B L - 2\psi)} + r^4 e^{-j(4k_B L - 4\psi)} + \dots \right) = \frac{\underline{v}_{2+(0)}}{1 - r^2 e^{-j(2k_B L - 2\psi)}} \quad (4.28)$$

Dado que consideramos que la reflexión de la onda se produce sólo en un extremo, con un coeficiente de reflexión r menor que 1, re^{iy} aparece en lugar de r^2e^{iy} . Pero al igual que en este caso, la onda resultante alcanza su máxima amplitud si la onda doblemente reflejada y todas sus sucesoras coinciden en fase después de cada viaje de ida y vuelta; por ejemplo, si:

$$2k_B L - 2y = 2n\pi \quad (4.29)$$

Esta es la condición para los modos propios de vibración. Por lo tanto, incluso en placas finitas se ha de tener en cuenta las resonancias de las ondas de flexión libres de segundo orden, las cuales pueden dar lugar a pérdidas adicionales.

Si se ignoran las pérdidas en los límites y tratamos el soporte en $y=0$ como ideal, se obtiene el factor de pérdidas complejo \underline{r} , al introducir en el campo de velocidades

$$\underline{v} = \underline{v}_+ \left(e^{jk_B y} + \underline{r} e^{-jk_B y} + \underline{r}_{-j} e^{-k_B y} \right) \quad (4.30)$$

(que contiene, además de la onda incidente viajando en la dirección $-y$, una onda reflejada y una onda de campo próximo en el límite) las condiciones frontera:

$$y = 0, \underline{v} = 0: \quad \underline{r} + \underline{r}_{-j} = -1 \quad (4.31)$$

$$\frac{d^2 \underline{v}}{dy^2} = 0: \quad -\underline{r} + \underline{r}_{-j} = +1 \quad (4.32)$$

De este modo:

$$\underline{r} = -1 \quad (4.33)$$

Este simple resultado, análogo a la reflexión de la onda de presión sonora en el extremo abierto de un tubo, se relaciona con:

$$\underline{r}_{-j} = 0 \quad (4.34)$$

esto es, la desaparición del campo próximo cuasi-estacionario en el límite. Esta es la principal simplificación que el borde apoyado ofrece.

Con esto, la ecuación (4.28) se simplifica a:

$$\underline{v}_{2+(res)} = \frac{\underline{v}_{2+(0)}}{1 - e^{-j2k_B L - \eta k_B L/2}} \quad (4.35)$$

Aquí, debemos considerar la atenuación durante la propagación para conseguir una amplitud finita en la resonancia. De esta manera, los modos propios de vibración de una placa apoyada en ambos extremos, al igual que los de un tubo abierto o cerrado en ambos extremos, vienen dados por:

$$2k_B L = 2n\pi; \quad L = n\lambda_B/2 \quad (4.36)$$

De acuerdo con la ecuación (4.36), las correspondientes frecuencias para ondas de flexión son proporcionales a los cuadrados de los números enteros n :

$$f_n = 0.45c_{LP}h \left(\frac{n}{L} \right)^2 \quad (4.37)$$

Los patrones naturales de vibración, denominados modos propios, de las magnitudes de campo ξ y v consideradas constan de semi-arcos sinusoidales:

$$\underline{v} = \underline{v}_{\max} \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \quad (4.38)$$

Los patrones para una placa rectangular de dimensiones L_y y L_z , apoyada en sus cuatro bordes, se pueden describir por el producto:

$$\underline{v} = \underline{v}_{\max} \sin\left(\frac{n_y \pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L_z} z\right) \quad (4.39)$$

y las correspondientes frecuencias propias a las cuales se produce la resonancia (n_y, n_z) vienen dadas por:

$$f_{n_y n_z} = 0.45c_{LP}h \left[\left(\frac{n_y}{L_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{L_z} \right)^2 \right] \quad (4.40)$$

Al igual que con n en el caso unidimensional, los índices n_y y n_z pueden tomar cualquier valor entero positivo distinto de cero: 1, 2, ... Esto significa, sin embargo, que el caso unidimensional no está incluido en la ecuación (4.40), ya que ni n_y ni n_z pueden ser cero.

En el caso unidimensional de una placa de dimensiones finitas, el campo resultante puede estar compuesto de cuatro ondas:

- 1) La onda de flexión resultante de la excitación de la placa en el punto de apoyo izquierdo y que se propaga en la dirección $+y$:

$$-\frac{v_1}{2} \frac{e^{-jk_B y}}{1 - e^{-j2k_B L}} \quad (4.41)$$

- 2) La reflexión de la onda anterior en el extremo opuesto:

$$-\frac{v_1}{2} \frac{-e^{jk_B L} e^{+jk_B (y-L)}}{1 - e^{-j2k_B L}} \quad (4.42)$$

La velocidad de la onda reflejada comienza con un cambio de signo y un retraso de fase de $k_B L$ en el punto de apoyo derecho. Juntas, las ondas 1 y 2 forman una onda estacionaria que puede describirse como una onda sinusoidal que comienza en $y=L$ (extremo derecho):

$$j \frac{v_1}{2} \frac{e^{-jk_B L} 2 \sin k_B (y-L)}{1 - e^{-j2k_B L}} = \frac{v_1 \sin(k_B (y-L))}{2 \sin(k_B L)} \quad (4.43)$$

- 3) Del mismo modo, la onda incidente en el punto de apoyo derecho, $y=L$, donde toma el valor $\underline{v}_1 e^{-jk_L \sin \vartheta}$, produce una onda de flexión que se propaga en la dirección $-y$:

$$-\frac{\underline{v}_1}{2} \frac{e^{-jk_L \sin \vartheta} e^{jk_B (y-L)}}{1 - e^{-j2k_B L}} \quad (4.44)$$

- 4) Finalmente, tenemos la correspondiente onda reflejada en $y=0$:

$$-\frac{\underline{v}_1}{2} e^{-jk_L \sin \vartheta} \frac{-e^{-jk_B L} e^{-jk_B y}}{1 - e^{-j2k_B L}} \quad (4.45)$$

Las ondas 3 y 4, correspondientes a la excitación en el punto de apoyo derecho, también se combinan formando una onda estacionaria. En este caso, la onda sinusoidal que describe comienza en $y=0$:

$$j \frac{v_1}{2} e^{-jkL \sin \vartheta} \frac{e^{-jk_B L} 2 \sin k_B y}{1 - e^{-j2k_B L}} = -\frac{v_1}{2} e^{-jkL \sin \vartheta} \frac{\sin k_B y}{\sin k_B L} \quad (4.46)$$

La combinación de las cuatro ondas resulta en:

$$-\frac{v_1}{2} \frac{-\sin(k_B(y-L)) + e^{-jkL \sin \vartheta} \sin(k_B y)}{\sin k_B L} \quad (4.47)$$

En general, todas las frecuencias para las cuales el denominador se hace cero, es decir, todas las posibles frecuencias de resonancia, aparecerán. Pero existen excepciones. Por ejemplo, resulta evidente que una onda incidente normal a la placa sólo puede excitar aquellos modos que sean simétricos respecto a $y=L/2$. Aunque lo mismo podría ocurrir también para incidencia oblicua, en general siempre que:

$$kL \sin \vartheta = m2\pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

La ecuación (4.47) podría entonces simplificarse de la siguiente manera:

$$-\frac{v_1}{2} \frac{\sin(k_B y) - \sin(k_B(y-L))}{\sin k_B L} = -\frac{v_1}{2} \frac{2 \sin(k_B L/2) \cos(k_B(y-L/2))}{\sin k_B L} = -\frac{v_1}{2} \frac{\cos(k_B(y-L/2))}{\cos(k_B L/2)} \quad (4.49)$$

Obtenemos, como era de esperar, una onda estacionaria que es simétrica respecto al centro: $\cos(k_B(y-L/2))$. Frente a esto, el factor $\sin(k_B L/2)$ aparece debido a la interacción en fase de las dos excitaciones. Esto quiere decir que prácticamente desaparecen aquellas ondas estacionarias para las cuales:

$$k_B L/2 = n\pi; \quad L = n \left(\frac{\lambda_B}{2} \right); \quad n = 2, 4, 6, \dots \quad (4.50)$$

Las vibraciones propias correspondientes a enteros pares no son excitadas. Esto se corresponde con los puntos para los que el nuevo denominador $\cos(k_B L/2)$, que se obtiene tras eliminar el factor $\sin(k_B L/2)$ tanto en el numerador como en el denominador, se hace cero.

De forma similar, sólo obtendremos soluciones antisimétricas respecto al centro si la excitación en ambos extremos se encuentra en contrafase. Esto ocurre cuando:

$$kL \sin \vartheta = (2m + 1) \pi; \quad (4.51)$$

En este caso, la ecuación (4.47) se transformaría en:

$$\frac{\underline{v}_1}{2} \frac{\sin \underline{k}_B y + \sin \underline{k}_B (y - L)}{\sin \underline{k}_B L} = \frac{\underline{v}_1}{2} \frac{2 \cos \underline{k}_B \frac{L}{2} \sin \underline{k}_B \left(y - \frac{L}{2} \right)}{\sin \underline{k}_B L} = \frac{\underline{v}_1}{2} \frac{\sin \underline{k}_B \left(y - \frac{L}{2} \right)}{\sin \underline{k}_B \frac{L}{2}} \quad (4.52)$$

Mientras que el caso de excitación puramente simétrica para incidencia normal, correspondiente a $m=0$, siempre puede ocurrir para todas las frecuencias, incluso para frecuencias muy bajas; el caso de excitación asimétrica, de acuerdo con la ecuación (4.51), se produce en primer lugar por encima de $kL=\pi$ para incidencia rasante. Esto significa que la longitud de la placa debe corresponder a media longitud de onda de la onda de excitación sonora. Dado que asumimos que, para paneles de uso común en la práctica, la frecuencia crítica es bastante alta, la frecuencia correspondiente a $L=\lambda/2$ es mucho mayor que la frecuencia propia de flexión más baja correspondiente a $L=\lambda_B/2$. De hecho, normalmente es hasta mayor que la frecuencia del segundo modo propio de flexión, correspondiente a $L=\lambda_B$, la cual requiere de una distribución antisimétrica de la excitación para ser inducida.

Si transformamos el numerador de la ecuación (4.47), omitiendo las pérdidas, en:

$$2e^{-ikL \sin \vartheta / 2} \left[\cos \left(\frac{kL}{2} \sin \vartheta \right) \sin \frac{k_B L}{2} \cos k_B \left(y - \frac{L}{2} \right) - j \sin \left(\frac{kL}{2} \sin \vartheta \right) \cos \frac{k_B L}{2} \sin k_B \left(y - \frac{L}{2} \right) \right] \quad (4.53)$$

podemos observar que el primer término, correspondiente a la solución simétrica, es, debido su factor $\cos (kL \sin \vartheta / 2)$, preferentemente excitado a frecuencias bajas; en comparación con el segundo término, correspondiente a la solución antisimétrica, con su factor $\sin (kL \sin \vartheta / 2)$. Si la longitud de la placa es pequeña en comparación a la longitud de onda, el segundo término puede despreciarse completamente.

La solución completa para la velocidad resultante de una placa de longitud L apoyada en ambos extremos y excitada por una onda sonora incidente con un ángulo cualquiera ϑ viene dada por:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 \left[e^{-jk \sin \vartheta y} - \frac{1}{2} \frac{\sin(\underline{k}_B(y-L)) + e^{-jkL \sin \vartheta} \sin \underline{k}_B y}{\sin \underline{k}_B L} - \frac{1}{2} e^{-k_B y} - \frac{1}{2} e^{-jkL \sin \vartheta} e^{+k_B L(y-L)} \right] \quad (4.54)$$

En las deducciones anteriores, hemos asumido que los campos próximos de los límites están lo suficientemente atenuados en los respectivos extremos opuestos como para ser despreciados. Incluso a la frecuencia propia más baja, dada por $k_B L = \pi$, el campo próximo excitado en el límite izquierdo llega al extremo derecho en una proporción de sólo $e^{-\pi/2} = 2.2\%$. Si estuviéramos interesados en considerar también la transición a la flexión estática, tendríamos que tener en cuenta el hecho de que el campo próximo exponencialmente decreciente del límite también es reflejado en el extremo opuesto. Para la placa apoyada, esto sólo significa la aparición de otro campo próximo del límite de signo opuesto. Si introducimos, en lugar de la ecuación (4.30):

$$\underline{v} = \underline{v}_j e^{k_B y} + \underline{v}_+ e^{-jk_B y} + \underline{v}_- e^{-k_B y} \quad (4.55)$$

en las condiciones de contorno de las ecuaciones (4.31) y (4.32), obtenemos esta vez:

$$\underline{v}_+ = 0 \quad y \quad \underline{v}_- = -1 \quad (4.56)$$

Podemos asumir, por lo tanto, el cálculo completo para las componentes de la onda; tan sólo tenemos que emplear jk_B en lugar de k_B . Así, para el caso más interesante de incidencia normal, obtenemos la siguiente expresión:

$$\underline{v} = \underline{v}_1 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\cos(\underline{k}_B y)}{\cos(\underline{k}_B L/2)} - \frac{1}{2} \frac{\cosh(\underline{k}_B y)}{\cosh(\underline{k}_B L/2)} \right) \quad (4.57)$$

donde esta vez el centro de la placa se encuentra en $y=0$.

Puesto que los picos de resonancia se hacen menos pronunciados cuanto mayor es la frecuencia, lo que corresponde al denominador de la ecuación (4.47) para la resonancia

$$\sin\left(n\pi\left(1-j\frac{\eta}{4}\right)\right) = j\sinh\frac{n\pi\eta}{4} \approx -j\frac{n\pi\eta}{4} \quad (4.58)$$

estamos interesados fundamentalmente en la frecuencia propia más baja, dada por $n=1$.

Si predominan las pérdidas en las reflexiones, el denominador de la ecuación (4.28) es el que cuenta; en resonancia se convierte en $(1-r^2)$, es decir, el coeficiente de absorción para ondas de flexión. En general, esto también aumenta con la frecuencia.

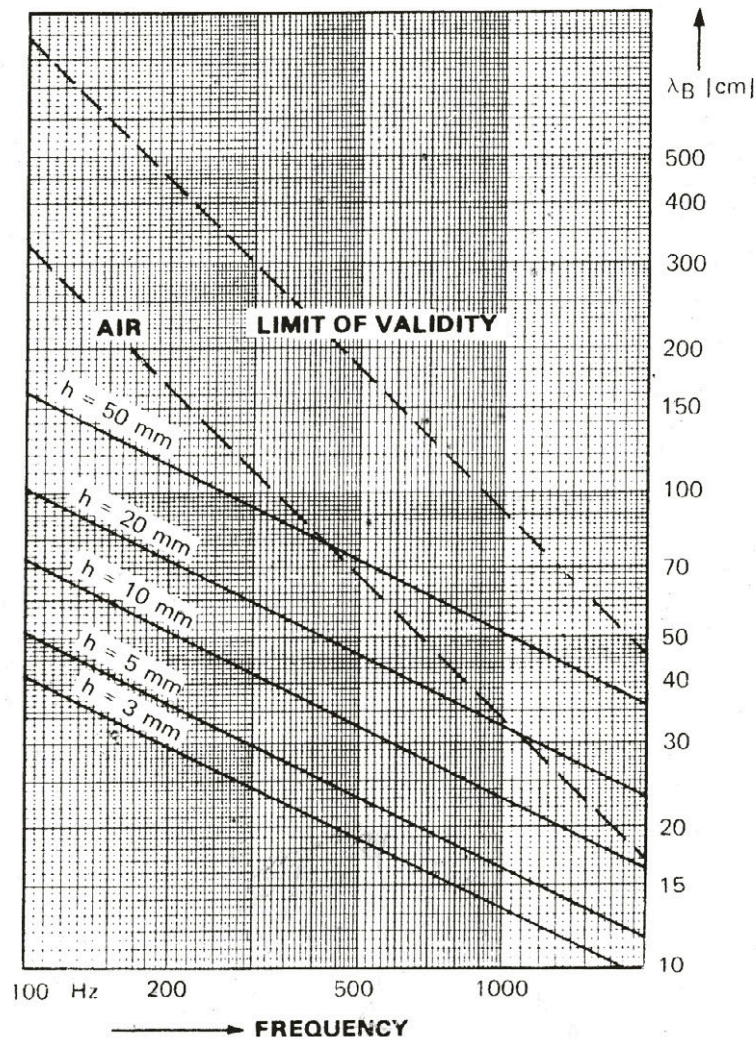


Figura 4.4. Longitudes de onda de flexión de placas de madera contrachapada ($c_L=300000 \text{ cms}^{-1}$) en función de la frecuencia para diferentes espesores

A este respecto, es interesante conocer la frecuencia con la que puede ocurrir en la práctica que una placa se apoye a distancias de sólo la mitad de una longitud de onda de flexión. La Figura 4.4 muestra las longitudes de onda de flexión de placas de madera contrachapada de diferentes espesores en función de la frecuencia. Aquí consideramos un espesor de 20 mm como el valor práctico más grande para los paneles utilizados como absorbentes de sonido en la acústica de salas. A 100 Hz, la frecuencia más baja de medida habitual en acústica arquitectónica, nos encontramos con una longitud de onda de flexión de alrededor de 1 m. Los soportes de la placa tendrían que estar separados unos 50 cm para resonar a su frecuencia propia más baja en estas condiciones. De hecho, sin embargo, los soportes del panel están por lo general más próximos de lo que es necesario por razones de carga estática; el arquitecto le preocupa, en aras de la apariencia, para evitar la deformación por flexión. Pero esto se podría lograr con una placa de 2 cm de grosor sin apoyos cada 50 cm. Incluso con un panel de 5 mm de espesor, que es sin duda el más delgado empleado en la práctica, aunque el riesgo de que se produzca alguna deformación es mucho mayor, aún no sería necesario apoyarlo cada 25 cm, lo que correspondería a la mitad de longitud de onda de flexión para 100 Hz.

Pero debemos tener en cuenta que las frecuencias de resonancia más bajas de placas apoyadas en sus cuatro extremos son considerablemente mayores. Tal y como se desprende de la comparación de las ecuaciones (4.37) y (4.40), debemos sustituir L por la longitud resultante dada por:

$$\frac{1}{L_{res}^2} = \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \quad (4.59)$$

La Figura 4.5 muestra esta longitud resultante como parámetro de las curvas representadas en el plano L_y - L_z . El mayor incremento de frecuencia tiene lugar para placas cuadradas, en concreto, una octava completa. Si, por el contrario, pedimos las dimensiones de la placa necesarias para obtener la frecuencia propia más baja a 100 Hz, resulta que debemos multiplicar las longitudes mencionadas anteriormente por $2^{1/2}$, lo que todavía se traduce en distancias cortas entre apoyos. Si las placas estuvieran fijas, sin embargo, la frecuencia propia más baja sería mucho más alta. Pero ya hemos discutido anteriormente que tal condición de contorno no se puede lograr en la práctica.

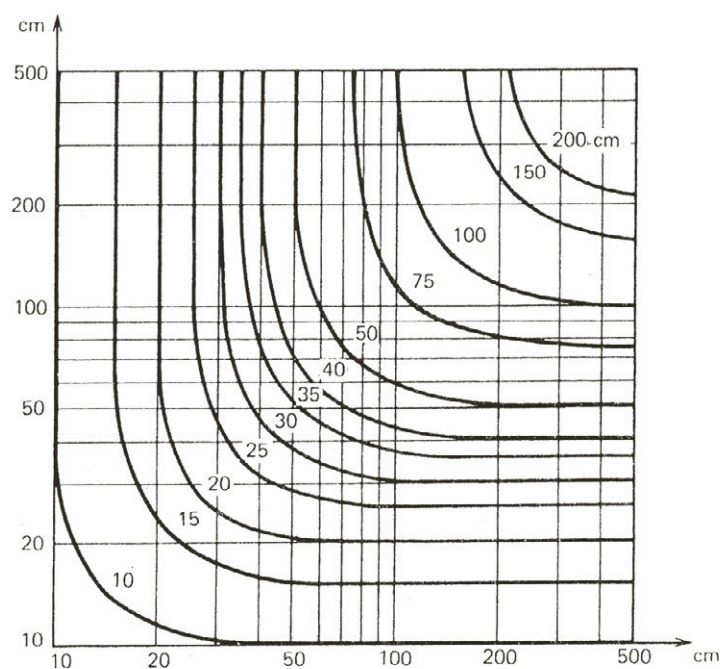


Figura 4.5. Gráfica para la ecuación (4.59). Abscisa, L_y ; ordenada, L_z ; parámetro de las curvas, L_{res} .

En resumen, podemos afirmar que la frecuencia propia de flexión más baja de los paneles estará, en general, por debajo del rango de frecuencias consideradas para las mediciones en acústica arquitectónica.

4.4 Acoplamiento entre ondas de flexión en la placa y ondas sonoras en la capa de aire

Cuando una onda sonora incide sobre una placa rígida, con un ángulo ϑ respecto a la normal, se genera en dicha placa una onda de flexión forzada con la traza de velocidad $c/\sin\vartheta$; la dependencia espacial del vector temporal de velocidad se describe por:

$$\underline{v} = \underline{v}_0 e^{-jk \sin \vartheta y} \quad (4.60)$$

La misma dependencia espacial se mantiene para las ondas forzadas de todas las magnitudes de campo en la capa de aire. El presente análisis se limita a capas de aire tan delgadas (o frecuencias tan bajas) que podemos considerar constante la presión sonora en toda su sección transversal.

Para la velocidad de la placa dada por la ecuación (4.60), la presión toma la siguiente forma:

$$\underline{p} = \underline{v}_0 \frac{\rho c^2}{j\omega d \cos^2 \vartheta} e^{-jk \sin \vartheta y} \quad (4.61)$$

La componente de velocidad normal a la placa en la capa de aire adquiere el mismo valor que la propia velocidad de la placa v_0 en las inmediaciones de la misma, y se hace cero en la pared rígida al otro lado. La transición ocurre de forma lineal en cada posición, para los pequeños valores de kd asumidos.

De mayor importancia para los cálculos sucesivos resulta la componente tangencial de velocidad v_y , que puede describirse como:

$$\underline{v}_y = \frac{-1}{j\omega \rho} \frac{dp}{dy} = \frac{-j \sin \vartheta}{kd \cos^2 \vartheta} \underline{v}_0 e^{-jk \sin \vartheta y} \quad (4.62)$$

lo que significa que en el cociente

$$\frac{\underline{p}}{\underline{v}_y} = \frac{\rho c}{\sin \vartheta} \quad (4.63)$$

la traza de velocidad $c/\sin \vartheta$ sustituye a la velocidad de propagación en el aire.

Para aclarar esta relación, consideremos una placa de extensión semi-infinita ($y > 0$) apoyada en un extremo ($y=0$) y separada una pequeña distancia d de una pared rígida. Debido a la capa de aire encerrada entre la placa y la pared, las condiciones de contorno anteriores:

$$y = 0: \quad v = 0 \quad (4.64)$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} = 0 \quad (4.65)$$

han de complementarse con una tercera:

$$v_y = 0 \quad (4.66)$$

Así, se necesitan tres movimientos libres para satisfacer estas condiciones, y podemos asumir que dos están relacionados con el campo de ondas de flexión y el campo próximo en la placa, mientras que el tercero está relacionado con la onda sonora en la capa de aire encerrada en la cavidad.

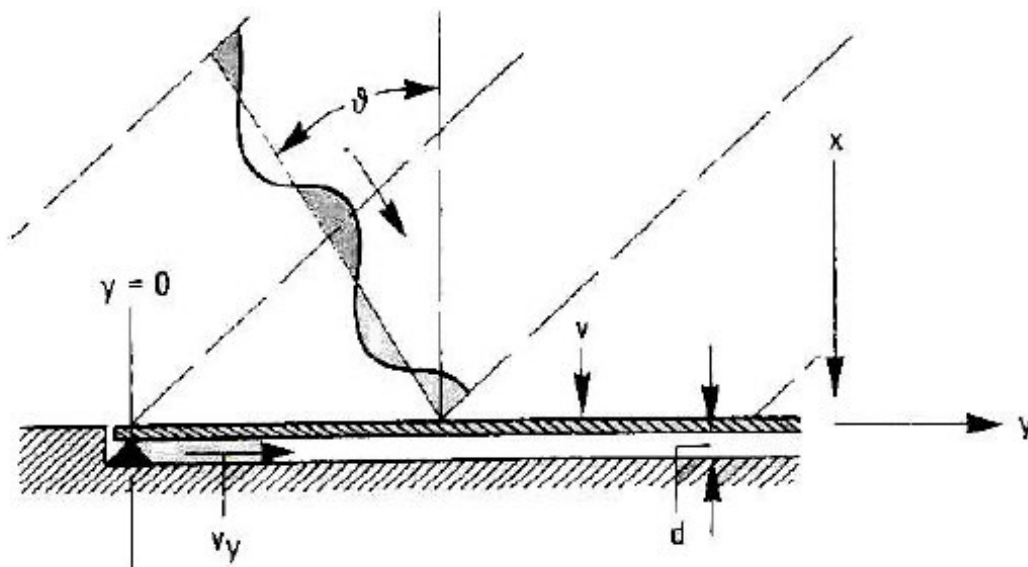


Figura 4.6. Placa semi-infinita delante de una capa delgada de aire, apoyada y cerrada en el origen, y excitada por una onda sonora con incidencia oblicua.

Sin embargo, no podemos esperar exactamente esos movimientos, ya que el movimiento de flexión de la placa y el movimiento de la capa de aire que encierra están ahora acoplados. En la ecuación de onda de flexión, esto se manifiesta por la aparición de la presión sonora de la capa de aire en la relación dinámica para un elemento de masa de la placa (su signo se deduce a partir de los signos en la Figura 4.6):

$$-\frac{B}{j\omega} \frac{d^4 \underline{v}}{dy^4} - \underline{p} = j\omega m \underline{v} \quad (4.67)$$

o

$$\frac{d^4 \underline{v}}{dy^4} - k_B^4 \underline{v} + \frac{j\omega}{B} \underline{p} = 0 \quad (4.68)$$

Por otro lado, la velocidad de la placa aparece ahora en la ecuación de compresión de la capa de aire:

$$-\frac{d\underline{v}_y}{dy} + \frac{\underline{v}}{d} = \frac{j\omega}{\rho c^2} \underline{p} \quad (4.69)$$

Combinada con la relación dinámica

$$-\frac{dp}{dy} = j\omega\rho\underline{v}_y \quad (4.70)$$

obtenemos la ecuación de onda del aire dentro de la cavidad complementada con un término de acoplamiento:

$$\frac{d^2 \underline{p}}{dy^2} + k_L^2 \underline{p} + \frac{j\omega\rho}{d} \underline{v} = 0 \quad (4.71)$$

donde el número de onda de las ondas sonoras longitudinales se indica mediante el subíndice L , ya que el término k se reserva para los números de onda de las ondas libres del aire teniendo en cuenta el acoplamiento.

De acuerdo con la ecuación diferencial lineal para las ondas libres (o campos próximos), y dada su dependencia con y , la cual viene dada por el factor $e^{\pm jky}$, podemos reemplazar las ecuaciones de onda modificadas (4.68) y (4.71) por las siguientes ecuaciones lineales:

$$(k^4 - k_B^4) \underline{v} + \frac{j\omega}{B} \underline{p} = 0 \quad (4.72)$$

$$\frac{j\omega\rho}{d} \underline{v} + (k_L^2 - k^2) \underline{p} = 0 \quad (4.73)$$

Estas ecuaciones no se contradicen sólo si el número de onda libre k obedezca la ecuación característica:

$$-\begin{vmatrix} (k^4 - k_B^4) & \frac{j\omega}{B} \\ \frac{j\omega\rho}{d} & (k_L^2 - k^2) \end{vmatrix} = (k^4 - k_B^4)(k_L^2 - k^2) - \frac{\omega^2\rho}{Bd} = 0 \quad (4.74)$$

Como era de esperar, esta ecuación característica es de tercer orden en k^2 , y por lo tanto conduce a tres tipos de movimiento libre que, en general, pueden ser funciones tanto de $+y$ como de $-y$. Dos de ellos, como ya hemos comentado

anteriormente, están estrechamente relacionados con la onda de flexión y el campo próximo de flexión de la placa. Esto se puede demostrar introduciendo en la ecuación (4.74) los términos de perturbación:

$$k_{1,2}^2 = \pm k_B^2 + \Delta(k^2) \quad (4.75)$$

Si el incremento $\Delta(k^2)$ es pequeño, sólo es necesario considerarlo en la diferencia $(k^4 - k_B^4)$, donde aparece como una corrección lineal. Así, obtenemos la desviación relativa de k^2 :

$$\frac{\Delta(k^2)}{k_B^2} = \frac{\omega^2 \rho / (Bd)}{2k_B^6 (1 \mp k_L^2/k_B^2)} = \frac{\rho}{2mdk_B^2 (1 \mp k_L^2/k_B^2)} \quad (4.76)$$

Dado que estamos analizando el comportamiento de estos sistemas para frecuencias muy por debajo de la frecuencia crítica, podemos simplificar la expresión anterior a:

$$\frac{\Delta(k^2)}{k_B^2} \approx \frac{\rho}{2mdk_B^2} = \frac{\rho \sqrt{Bm}}{\omega d} \quad (4.77)$$

Pero al aparecer aquí ω en el denominador, debemos concluir que la sustitución aproximada de k^4 por k_B^4 ya no es posible en frecuencias bajas, donde nos acercamos a condiciones estáticas.

Si introducimos la frecuencia crítica de la ecuación (4.13) y la frecuencia fundamental de resonancia del sistema de la ecuación (4.77), obtenemos para la desviación relativa de k^2 :

$$\frac{\Delta(k^2)}{k_B^2} \approx \frac{\omega_0^2}{2\omega\omega_{cr}} = \frac{f_0^2}{2ff_{cr}} \quad (4.78)$$

Si exigimos que la corrección se limite sólo a un 10%, esto implica que $f > f_0^2 / (0.2 f_{cr})$ —el valor de k puede sustituirse por el de k_B . Para una placa de contrachapado de 5 mm de espesor, f_{cr} está en torno a 4300 Hz. Si tenemos un sistema formado por un panel encerrando una capa de aire detrás sintonizado a 100 Hz, la aproximación $k_{1,2}^2 \approx \pm k_B^2$ es válida para frecuencias mayores de 11.6 Hz. Incluso para una placa de 2 mm de espesor, donde la frecuencia crítica cae hasta unos 1080 Hz, la aproximación sería aceptable por encima de 46 Hz.

Se podría tratar de explicar el hecho de que el número de onda de flexión prácticamente se mantiene, simplemente como una consecuencia de que la capa de aire tenga sólo una pequeña reacción al movimiento de la placa rígida. Pero esta interpretación sería errónea, por el hecho de que la masa de la placa y la rigidez de la capa de aire forman un sistema vibratorio en el que sus reactancias se igualan en caso de resonancia.

En cambio, debemos preguntarnos por qué la reactancia de la capa de aire no influye de forma significativa en las ondas de flexión ni en los campos próximos de la placa. Esto se puede explicar físicamente si obtenemos de la ecuación (4.73) el cociente $\underline{p}/\underline{v}$ y establecemos $k=k_B$:

$$\frac{\underline{p}}{\underline{v}} = \frac{-j\omega\rho}{(k_L^2 - k^2)d} = \frac{1}{(j\omega d/\rho c^2) + (k_B d/j\rho c_B)} \quad (4.79)$$

La impedancia con la que se carga la placa para ondas de flexión representa una conexión en paralelo de dos reactancias: la de la rigidez de la capa de aire, y otra mucho más pequeña

$$\underline{Z} = \frac{j\rho c_B}{k_B d} = j \frac{\rho}{d} \sqrt{\frac{B}{m}} \quad (4.80)$$

que, de acuerdo a su signo, tiene la naturaleza de una masa y debe estar relacionada con masas aceleradas en la capa de aire. Esto también se hace evidente por su numerador $j\omega c_B$, que describe la reactancia de inercia del aire que vibra en las inmediaciones de una placa libre sobre la que se propaga una onda de flexión. Si transformamos la ecuación (4.80) en:

$$\underline{Z} = \frac{j\omega\rho d}{(k_B d)^2} \quad (4.81)$$

su carácter hidrodinámico aparece aún más claro. Aquí, ρd es la masa por unidad de espesor de la capa de aire, que aparecería directamente si esta masa se moviese sólo en la dirección normal. En cambio, el flujo de volumen arrastrado y empujado en un cuarto de longitud de onda de flexión se comprime en el espesor d de la capa de aire. Una disminución tal de la sección transversal siempre conduce a una aceleración significativa, donde interviene el cuadrado de la relación de secciones transversales.

Crestas y valles de la onda de flexión libre, por tanto, pueden compensarse entre sí en la capa de aire sin necesidad de ningún tipo de compresión. De acuerdo con la ecuación (4.69), y junto con la ecuación (4.72), generalmente tenemos que:

$$\underline{v}_y = \int \left(\frac{\underline{v}}{d} - \frac{j\omega}{\rho c^2} \underline{p} \right) dy = \int \frac{\underline{v}}{d} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{k^4}{k_B^4} \right) \right) dy \quad (4.82)$$

Así, queda claro que el cálculo de \underline{v}_y a partir de \underline{v} , con $k^4 \approx k_B^4$, conduce a la ecuación para un flujo incompresible:

$$\underline{v}_y = \frac{1}{d} \int \underline{v} dy \quad (4.83)$$

Entonces, una onda de flexión $\underline{v}_{B+(0)} e^{-k_B y}$ en la placa va acompañada de una onda aérea \underline{v}_y en la cavidad, la cual se propaga con la misma velocidad de fase:

$$\underline{v}_{yB+} = \underline{v}_{B+(0)} \frac{j}{k_B d} e^{-jk_B y} \quad (4.84)$$

A pesar del aumento de la reactancia de inercia del aire en la cavidad por un factor $1/(k_B d)$ en la ecuación (4.81), respecto a aquella para una placa vibrando libremente, esta reactancia adicional aún es pequeña comparada con $j\omega m$, en el margen de frecuencias de interés. Pero dado que \underline{Z} en la ecuación (4.80) es independiente de la frecuencia, aquí nos encontramos de nuevo con una limitación de la validez de la aproximación $k_1^2 \approx k_B^2$ a muy bajas frecuencias.

La ecuación (4.83) también es válida para el campo próximo de flexión en el límite $\underline{v}_{Bj(0)} e^{-k_B y}$. En este caso, obtenemos un campo próximo decreciente con el mismo exponente en la capa de aire:

$$\underline{v}_{yBj} = \underline{v}_{Bj(0)} \frac{-1}{k_B d} e^{-k_B y} \quad (4.85)$$

Puesto que ahora $k_2^2 = k_B^2$ se debe reemplazar por $k_2^2 = -k_B^2$ en la ecuación (4.79), la reactancia, en paralelo con la de la rigidez de la capa de aire, cambia de signo y adopta también el carácter de una rigidez. Sin embargo, su magnitud se

mantiene y de nuevo puede ser despreciada en comparación con $j\omega m$ en el rango de frecuencias de interés.

Pero todo el flujo tangencial transitorio se ve obstaculizado en $y=0$ por el cierre rígido, no por el cambio en las componentes v_y correspondientes a los movimientos de flexión dadas por las ecuaciones (4.84) y (4.85), sino por la adición de una onda aérea en el colchón de aire que está causada justo por esta condición.

Respecto a esta onda aérea, existen márgenes de frecuencia donde el correspondiente número de onda k_3 apenas difiere del número de onda k_L que correspondería a una onda aérea propagándose en campo libre, o incluso en un canal con paredes rígidas de anchura d . Pero para ω_0 y frecuencias angulares próximas, regiones de especial interés, este no es el caso en absoluto. La interacción completamente diferente entre la masa de la placa y la rigidez del aire en la cavidad, en este caso, se hace completamente evidente si obtenemos el cociente $(-\underline{p}/\underline{v})$ de la ecuación (4.67), introduciendo una onda con un número de onda $k=k_3$:

$$-\frac{\underline{p}}{\underline{v}} = \frac{B}{j\omega} k_3^4 + j\omega m \quad (4.86)$$

Así, obtenemos la impedancia resultante, donde la reactancia de la masa de la placa y la reactancia de la rigidez del aire para el número de onda k_3 están conectadas en serie. Pero si k_3^4 es pequeño comparado con k_B^4 , lo que parece probable teniendo en cuenta la relación de k_3 respecto a k_L , y que comprobaremos más adelante, sólo permanece la reactancia de la masa de la placa. Así que la ecuación (4.69) muestra la reactancia de la rigidez del aire en la cavidad y la de la masa de la placa conectadas en paralelo, debido a que se han de añadir las correspondientes admitancias:

$$-d \frac{d\underline{v}_y}{dy} = \left[\frac{j\omega d}{\rho c^2} + \frac{1}{j\omega m} \right] \underline{p} \quad (4.87)$$

En resonancia ambas son iguales.

Si sustituimos $\underline{v} = (-1/j\omega m)\underline{p}$, despreciando el primer término de la derecha de la ecuación (4.86), en la ecuación (4.71), obtenemos la ecuación de onda aproximada para la capa de aire encerrada en la cavidad:

$$\frac{d^2 \underline{p}}{dy^2} + k_L^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \underline{p} = 0 \quad (4.88)$$

la cual proporciona de forma implícita la siguiente aproximación para el número de onda k_3 :

$$k_{3,0}^2 = k_L^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \quad (4.89)$$

Este valor aproximado de k_3 tiende asintóticamente hacia k_L para altas frecuencias. Para $\omega = \omega_0$ se hace cero, lo que significa que aquí toda la capa de aire de la cavidad reacciona en fase, como un todo. Para $\omega < \omega_0$, $k_{3,0}^2$ se hace negativo, es decir, $k_{3,0}$ es imaginario; lo cual indica que en este margen de frecuencias todo movimiento ondulatorio del colchón de aire se desvanece y sólo se origina un campo próximo cuasi-estacionario. No obstante, todas estas declaraciones aún tienen que ser constatadas. Para ello, establecemos

$$k_3^2 = k_L^2 \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) + \Delta(k^2) \quad (4.90)$$

en la ecuación característica (4.74), que se transforma en:

$$(k^4 - k_B^4)(k^2 - k_L^2) - k_B^4 k_L^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 0 \quad (4.91)$$

Introduciendo la frecuencia crítica de la ecuación (4.13), obtenemos la siguiente expresión para el error relativo de k_3 , cuyo valor se ha aproximado mediante $k_{3,0}$:

$$\frac{\Delta(k^2)}{k_{3,0}^2} = \frac{k_{3,0}^2(k_{3,0}^2 - k_L^2)}{k_B^4} = -\frac{\omega_0^2}{\omega_{cr}^2} \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right) \quad (4.92)$$

Si fuera posible despreciar $k^4 \approx k_{3,0}^4$ en comparación con k_B^4 , obtendríamos que $\Delta(k_2) \approx 0$. Por tanto, el problema se reduce de nuevo a determinar en qué región podemos considerar

$$\left(\frac{k_{3,0}}{k_B}\right)^4 = \frac{\omega^2}{\omega_{cr}^2} \left(1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)^2 \ll 1 \quad (4.93)$$

Si mantenemos $f_0=100$ Hz, podemos considerar $f_0/2=f=50$ Hz como la frecuencia más baja de interés. Si además asumimos que, al menos, $f_{cr}=1000$ Hz, la expresión de la ecuación (4.93) resulta sólo en 0.0225. Para frecuencias más altas se hace todavía menor, siempre y cuando nos encontremos lo suficientemente por debajo de la frecuencia crítica.

La onda aérea en la capa de aire con número de onda k_3 (o $k_{3,0}$) provoca un movimiento en la placa con el mismo número de onda. Si describimos este último mediante

$$\underline{v}_{3(0)} e^{-jk_3 y} \quad (4.94)$$

la ecuación (4.82) resulta esta vez en:

$$\underline{v}_{y3} = \frac{1}{d} \int \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \underline{v}_3 dy = \underline{v}_{3(0)} \frac{j}{k_3 d} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) e^{-jk_3 y} \quad (4.95)$$

La expresión anterior también puede transformarse en:

$$\underline{v}_{y3} = \underline{v}_{3(0)} \frac{-jk_3 m}{\rho} e^{-jk_3 y} \quad (4.96)$$

Esta relación se obtiene directamente expresando \underline{v}_y , de acuerdo con la ecuación (4.70), en función de \underline{p} (reemplazando aquí la derivada por el factor $-jk_3$) y expresando \underline{p} , de acuerdo con la ecuación (4.72), en función de \underline{v} (despreciando aquí k_3^4 en comparación con k_B^4).

Ahora ya es posible establecer las tres condiciones de contorno como tres ecuaciones lineales que relacionan $v_1 = v_{B+}$, $v_2 = v_{Bj}$, v_3 y el movimiento dado v_0 :

$$\begin{aligned}
 v_{(0)} = 0: \quad & \underline{v}_{B+} + \underline{v}_{Bj} + \underline{v}_3 = -\underline{v}_0 \\
 \left(\frac{d^2 v}{dy^2} \right)_0 = 0: \quad & -k_B^2 \underline{v}_{B+} + k_B^2 \underline{v}_{Bj} - k_3^2 \underline{v}_3 = (k_L \sin \vartheta)^2 v_0 \\
 v_{y(0)} = 0: \quad & \frac{j}{k_B d} \underline{v}_{B+} - \frac{1}{k_B d} \underline{v}_{Bj} - \frac{jk_3 m}{\rho} \underline{v}_3 = \frac{\sin \vartheta}{k_L d \cos^2 \vartheta} v_0
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

No entraremos aquí a discutir de manera general estos resultados. No obstante, sí calcularemos, a modo de ejemplo, la proporción de amplitud del movimiento de mayor interés v_3 en la placa:

$$\frac{\underline{v}_3}{\underline{v}_0} = - \frac{(1-j) + \left(\frac{k_3}{k_B} \right)^2 \sin^2 \vartheta (1-j) + j 2 \frac{k_B}{k_3} \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta}}{(1-j) - \left(\frac{k_3}{k_B} \right)^2 (1+j) - 2k_B k_3 \frac{md}{\rho}} \tag{4.98}$$

Dado que $k_3^2 \ll k_B^2$, podemos simplificar esta relación en:

$$\frac{\underline{v}_3}{\underline{v}_0} = - \frac{(1-j) + j 2 \frac{k_B}{k_3} \frac{\sin \vartheta}{\cos^2 \vartheta}}{(1-j) - 2k_B k_3 \frac{md}{\rho}} \tag{4.99}$$

A partir de aquí, podemos obtener la correspondiente velocidad tangencial en la capa de aire a partir de la ecuación (4.96), y la correspondiente presión sonora a partir de la ecuación (4.70).

El último término en el numerador de la ecuación (4.99), el cual predomina sobre el primero para incidencia oblicua debido a que $k_B \gg |k_3|$, indica que la onda aérea libre y el correspondiente campo próximo son causados por la onda de flexión forzada que se propaga, lo que infringe la condición de contorno $v_y = 0$ en $y = 0$. Pero incluso para incidencia normal, se necesita un movimiento aéreo libre en la capa de aire para compensar los movimientos hidrodinámicos también causados por las ondas de flexión en el límite $y = 0$.

4.5 Placa finita y capa de aire

La excitación de ondas aéreas en la capa de aire de la cavidad nos lleva a esperar que estas se reflejarán una y otra vez en los dos extremos creando ondas estacionarias, cuya amplitud se hace máxima si tras cada viaje completo de ida y vuelta dichas ondas coinciden en fase. Así, debemos esperar la aparición de resonancias en la cavidad que dependen del número de onda k_3 en la capa de aire y la distancia L entre los dos extremos.

Si las frecuencias de resonancia de estos modos propios aéreos se encuentran lo suficientemente por encima de la frecuencia fundamental f_0 del sistema masa (de la placa)-resorte (del aire), k_3 es simplemente el número de onda de la onda sonora que se propaga en la cavidad. Dicha frecuencia fundamental f_0 viene dada, para resonadores de membrana, por:

$$f_0 = \frac{60}{\sqrt{md}} \quad (4.100)$$

Podemos esperar que las ondas en la cavidad se propaguen a la velocidad del sonido c , y que las frecuencias de resonancia, considerando sólo la dimensión mayor, se correspondan con las de un tubo cerrado en sus dos extremos:

$$f_{Ln} = n \frac{c}{2L} \quad (4.101)$$

Por ejemplo, para un ancho de 70 cm entre apoyos, se obtiene $f_{Ln} = 243$ Hz. Si asumimos una frecuencia de resonancia masa-resorte $f_0 = 100$ Hz, la desviación de k_3 respecto a k_L es sólo de un 9%, de acuerdo con la ecuación (4.89). Puesto que estamos interesados en la estimación de la absorción, y no en la afinación de instrumentos, esta desviación aún es tolerable.

Por otra parte, podemos establecer la relación existente entre las frecuencias propias del aire de la cavidad, ecuación (4.101), y las frecuencias propias de flexión de la placa, ecuación (4.37), haciendo uso de la frecuencia crítica definida en la ecuación (4.13).

Para las frecuencias propias de flexión, obtenemos la siguiente relación con la frecuencia crítica:

$$f_{Bn} = \left(\frac{nc}{2L} \right)^2 \frac{1}{f_{cr}} \quad (4.102)$$

Esto que quiere decir que f_{Ln} es, para todo orden de n , la media geométrica de la frecuencia crítica y la frecuencia propia de flexión del mismo orden:

$$f_{Ln} = \sqrt{f_{Bn} f_{cr}} \quad (4.103)$$

Además, la relación entre la frecuencia crítica y la frecuencia propia aérea más baja f_{L1} (para placas rígidas) es la misma que aquella entre f_{L1} y la frecuencia propia de flexión más baja f_{B1} (sin capa de aire detrás de la placa):

$$\frac{f_{cr}}{f_{L1}} = \frac{f_{L1}}{f_{B1}} \quad (4.104)$$

Siguiendo con el ejemplo anterior, anchura entre soportes $L = 70$ cm, para una placa de contrachapado de 8 mm de espesor (cuya frecuencia crítica es de aproximadamente 2700 Hz), el valor resultante de la frecuencia propia de flexión más baja de una placa apoyada (sin capa de aire detrás) es $f_{B1} = 21.6$ Hz.

La frecuencia fundamental del sistema masa-resorte f_0 , que anteriormente hemos asumido ser de 100 Hz, generalmente se encontrará entre f_{B1} y f_{L1} . En muy raras ocasiones ocurre que $f_{B1} > f_0$; sin embargo, f_{L1} bien puede aproximarse a f_0 o incluso caer por debajo de la misma. Tan sólo hace falta duplicar la distancia entre apoyos L del ejemplo anterior, y reducir a la mitad el espesor de la capa de aire d , el cual se ha supuesto ser de 6 cm para un grosor de placa de 8 mm con el fin de obtener $f_0 = 100$ Hz.

Pero si introducimos $f_0 = 200$ Hz y $f = f_{L1} = 122$ Hz en la ecuación (4.89), resultaría un número de onda k_3 imaginario. Por tanto, para frecuencias por debajo de f_0 , no pueden existir ondas sonoras en la capa de aire de la cavidad, tan sólo campos próximos exponencialmente decrecientes que nunca podrían originar resonancias. Así, no es más que una ilusión pensar que mayores distancias entre apoyos L darían lugar a resonancias tangenciales adicionales que podrían extender la absorción a frecuencias por debajo de f_0 . Como se verá más adelante, esto mismo se aplica a las frecuencias propias de flexión.

Podemos calcular las resonancias tangenciales reales del aire encerrado en la cavidad empleando el principio de coincidencia de fase entre onda incidente y onda reflejada. Tan sólo debemos tener en cuenta el número de onda $k_{3,0}$ en lugar de su valor asintótico k_L :

$$k_{3,0}L = \frac{\omega}{c}L\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = n\pi \quad (4.105)$$

Para la frecuencia propia tangencial más baja de la capa de aire se obtiene:

$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 + \omega_0^2} \quad (4.106)$$

o

$$f_1 = \sqrt{f_{L1}^2 + f_0^2} \quad (4.107)$$

donde f_{L1} es la frecuencia propia tangencial del aire más baja de acuerdo con la ecuación (4.101), es decir, sin considerar el acoplamiento. Esto muestra claramente que la frecuencia propia real más baja de la capa de aire nunca puede caer por debajo de f_0 y f_{L1} .

No obstante, la ecuación (4.107) representa sólo una aproximación, en tanto que se ha asumido que la onda de la capa de aire se refleja sin pérdida de energía y sin cambio de fase en los límites, como ocurre en una pared rígida. En lugar de esta idealización, existen tres condiciones límite a cumplir, ya que la onda aérea siempre está acoplada con dos tipos de movimiento de la placa. Así, la onda excita una onda de flexión en cada reflexión, y viceversa. Esta continua transformación de ondas aéreas en ondas de flexión y campos próximos de flexión, y de ondas de flexión en ondas aéreas o los correspondientes campos próximos de flexión, resulta tan compleja en estos sistemas acoplados que hace muy complicado tratar el problema de la placa finita con capa de aire detrás como se ha hecho con la placa sola.

Pero podemos concluir, teniendo en cuenta la simetría de las condiciones de contorno, que la solución general siempre estará compuesta de dos soluciones. Una solución es simétrica con respecto a la velocidad de la placa v y puede expresarse mediante funciones coseno, con la mitad de la placa situada en $y = 0$; la otra es anti-

simétrica y puede describirse con funciones seno. Nos centraremos en el tratamiento de las primeras, ya que es la más probable de ser excitada en el margen de baja frecuencia en el que estamos más interesados.

Los tres tipos de movimientos propios libres existentes, con los números de onda k_1 , k_2 y k_3 , se han de combinar de la siguiente manera:

$$\underline{v} = \underline{v}_{1(0)} \cos(k_1 y) + \underline{v}_{2(0)} \cos(k_2 y) + \underline{v}_{3(0)} \cos(k_3 y) \quad (4.108)$$

En interés de una visión física, podemos sustituir $k_1 = k_B$ y $k_2 = -jk_B$, de forma que el segundo término aparece como un coseno hiperbólico:

$$\underline{v} \approx \underline{v}_{1(0)} \cos(k_B y) + \underline{v}_{2(0)} \cosh(k_B y) + \underline{v}_{3(0)} \cos(k_3 y) \quad (4.109)$$

El último término también se convierte en un coseno hiperbólico para $f < f_0$. Sin embargo, dado que pretendemos cubrir principalmente la región $f > f_0$, mantenemos la presentación con el coseno circular, pero sustituimos k_3 por $k_{3,0}$, de acuerdo con la ecuación (4.89).

Así, podemos establecer las dos primeras condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} \underline{v}_{(\pm L/2)} = 0: \quad & \underline{v}_{1(0)} \cos \frac{k_B L}{2} + \underline{v}_{2(0)} \cosh \frac{k_B L}{2} + \underline{v}_{3(0)} \cos \frac{k_{3,0} L}{2} = 0 \\ \left(\frac{d^2 \underline{v}}{dy^2} \right)_{y=\pm L/2} = 0: \quad & \underline{v}_{1(0)} \left(-k_B^2 \cos \frac{k_B L}{2} \right) + \underline{v}_{2(0)} \left(k_B^2 \cosh \frac{k_B L}{2} \right) \\ & + \underline{v}_{3(0)} \left(-k_{3,0}^2 \cos \frac{k_{3,0} L}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.110)$$

Es posible simplificar estas condiciones introduciendo las amplitudes de la velocidad en el límite:

$$\begin{aligned} \underline{v}_{1(L/2)} + \underline{v}_{2(L/2)} + \underline{v}_{3(L/2)} &= 0 \\ -\underline{v}_{1(L/2)} + \underline{v}_{2(L/2)} - \frac{k_{3,0}^2}{k_B^2} \underline{v}_{3(L/2)} &= 0 \end{aligned} \quad (4.111)$$

A partir de estas dos ecuaciones, se pueden obtener las proporciones de los valores de contorno de \underline{v}_1 , \underline{v}_2 y \underline{v}_3 :

$$\underline{v}_{1(L/2)} : \underline{v}_{2(L/2)} : \underline{v}_{3(L/2)} = \left(1 + \frac{k_{3,0}^2}{k_B^2}\right) : \left(1 - \frac{k_{3,0}^2}{k_B^2}\right) : (-2) \quad (4.112)$$

Puesto que $k_{3,0}^2 \ll k_B^2$ en la región de frecuencia de interés, los dos valores de contorno de las componentes de flexión son iguales, y a su vez la mitad y opuestos al valor de la componente de aire tangencial.

Para determinar las frecuencias propias aún es necesaria una tercera condición límite:

$$\underline{v}_{y(\pm L/2)} = 0 \quad (4.113)$$

Al igual que en el caso de la placa semi-infinita, podemos obtener las componentes \underline{v}_y a partir de las componentes \underline{v} , de acuerdo con la ecuación (4.82), teniendo en cuenta que k_1^4 y k_2^4 son prácticamente iguales que k_B^4 y que k_3^4 es mucho más pequeño en comparación. Es por esto que se recomienda realizar la siguiente transformación, análoga a aquella para la transición de la ecuación (4.95) a la ecuación (4.96):

$$\underline{v}_{1(0)} \frac{\sin \frac{k_B L}{2}}{k_B d} + \underline{v}_{2(0)} \frac{\sinh \frac{k_B L}{2}}{k_B d} - \underline{v}_{3(0)} \frac{k_{3,0} m}{\rho} \sin \frac{k_{3,0} L}{2} = 0 \quad (4.114)$$

o, empleando los valores de contorno:

$$\underline{v}_{1(L/2)} \tan \frac{k_B L}{2} + \underline{v}_{2(L/2)} \tanh \frac{k_B L}{2} - \underline{v}_{3(L/2)} \frac{k_{3,0} k_B m}{\rho} \tan \frac{k_{3,0} L}{2} = 0 \quad (4.115)$$

De nuevo tenemos tres relaciones lineales entre estas amplitudes, y la resolución del determinante de sus coeficientes forma la ecuación característica para las frecuencias propias deseadas.

Tomando las amplitudes en el medio, obtenemos:

$$\begin{vmatrix} \cos \frac{k_B L}{2} & \cosh \frac{k_B L}{2} & \cos \frac{k_{3,0} L}{2} \\ -\cos \frac{k_B L}{2} & \cosh \frac{k_B L}{2} & -\frac{k_{3,0}^2}{k_B^2} \cos \frac{k_{3,0} L}{2} \\ \sin \frac{k_B L}{2} & \sinh \frac{k_B L}{2} & -\frac{k_{3,0} k_B m d}{\rho} \sin \frac{k_{3,0} L}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.116)$$

O, empleando los valores en la frontera:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\frac{k_{3,0}^2}{k_B^2} \\ \tan \frac{k_B L}{2} & \tanh \frac{k_B L}{2} & -\frac{k_{3,0} k_B m d}{\rho} \tan \frac{k_{3,0} L}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.117)$$

La primera forma, de apariencia más complicada, no contiene funciones tangente y, por consiguiente, tampoco polos, lo que la hace preferible para uso computacional. Pero para la evaluación analítica del determinante, la segunda forma es naturalmente más manejable, fundamentalmente porque no es posible establecer fórmulas explícitas para las frecuencias propias sino que se tienen que determinar los puntos de intersección de las funciones trascendentales.

Además, existe la dificultad de que disponemos de tres frecuencias con las que poder normalizar la variable frecuencia: la frecuencia crítica f_{cr} , la frecuencia masa-resorte (aéreo) o frecuencia fundamental de resonancia f_0 , y la frecuencia propia de flexión más baja de la placa sin capa de aire detrás f_{B1} . Estas se corresponden con: la variación del tipo de placa (en lo que se refiere a espesor y material), la profundidad de la capa de aire encerrada en la cavidad, y la distancia entre los apoyos de la placa. Una discusión más general sólo sería posible haciendo uso de innumerables tablas y gráficas, para cuya construcción las condiciones de contorno que se dan de forma práctica en la edificación son demasiado inciertas. Esto es aplicable tanto a las condiciones frontera de las placas, como a la cuestión de si la capa de aire está realmente sellada acústicamente.

Nos centraremos en una cuestión particular frecuentemente resuelta de forma errónea. Al igual que la ecuación (4.107) demostró que no pueden darse frecuencias propias por debajo de f_0 , el mismo problema se plantea con respecto a las frecuencias propias de flexión.

Una simple consideración muestra que al menos el desplazamiento semi-sinusoidal correspondiente a f_{B1} no se puede producir si $f_0 \gg f_{B1}$ (véase la Figura 4.7), ya que esto significaría que la rigidez de la capa de aire de la cavidad predomina sobre la de la placa.

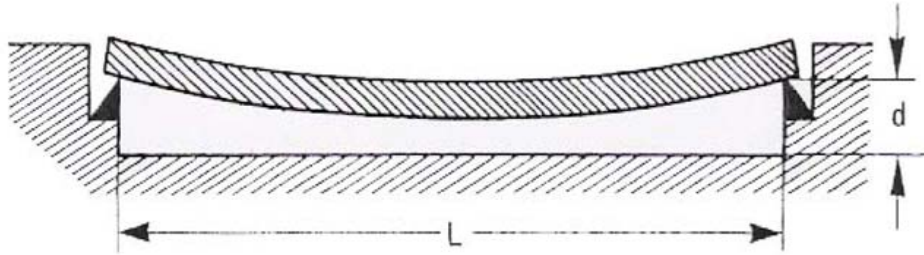


Figura 4.7. Desplazamiento a la frecuencia propia de flexión más baja, sin la influencia de la compresión del aire.

En esta cuestión particular, y probablemente también en otras, la frecuencia de flexión más baja f_{B1} es la opción más conveniente, por motivos matemáticos, para la normalización de la frecuencia. Esto es lo mismo que tomar el argumento $k_B L/2$ de la primera tangente en la ecuación (4.115) como el parámetro de frecuencia, el cual es proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia:

$$\frac{k_B L}{2} = \beta \quad (4.118)$$

Definiendo β_0 en base a la frecuencia de resonancia masa-resorte (aéreo) f_0 como:

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{f_0}{f_{B1}}} \quad (4.119)$$

se obtiene para $k_{3,0}^2$:

$$k_{3,0}^2 = k_L^2 \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = -\frac{\rho}{md} \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^4 \right) \quad (4.120)$$

Si desarrollamos ahora el determinante de la ecuación (4.117) de acuerdo a la última fila, obtenemos la ecuación característica para la solución gráfica:

$$\tan \frac{k_B L}{2} = \frac{\left(1 - \frac{k_{3,0}^2}{k_B^2}\right) \tanh \frac{k_B L}{2} + \frac{2k_{3,0}k_B m d}{\rho} \tan \frac{k_{3,0} L}{2}}{1 + \frac{k_{3,0}^2}{k_B^2}} \quad (4.121)$$

En el margen de frecuencias de interés, $k_{3,0}^2$ se puede considerar despreciable frente a k_B^2 . Así, es posible expresar el argumento de la última tangente como $(k_{3,0}/k_B)(k_B L/2)$, de este modo se observa que los términos del orden de $(k_{3,0}/k_B)^2 \beta^2$ son insignificantes y la función tangente puede sustituirse por su argumento.

Puesto que el estudio se centra en frecuencias sólo ligeramente por encima de f_0 , y aunque podamos estar interesados en frecuencias algo por debajo de f_0 , estas nunca serán tan bajas como para que $\beta = 0$. Luego se cumple:

$$\frac{2k_{3,0}k_B m d}{\rho} \tan \frac{k_{3,0} L}{2} = -2\beta \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^4\right) \quad (4.122)$$

La principal ventaja de estas aproximaciones radica en que la frecuencia crítica y los parámetros de construcción desaparecen; la frecuencia crítica debe ser mayor que las frecuencias de interés. Si la condición de la ecuación (4.121) para las frecuencias propias se simplifica a:

$$\tan \beta = 2\beta \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta_0}\right)^4\right) - \tanh \beta \quad (4.123)$$

Por ejemplo, para la frecuencia propia de flexión f_{B1} , si el valor de $\beta = \pi/2$, podemos simplificar la ecuación (4.123) a $\tan \beta \approx 1$.

Si en lugar de la ecuación (4.122), se escribe la ecuación característica en la región de frecuencia donde $\beta < \pi/2$, en la que se espera la frecuencia propia más baja para placas de dimensión finita sin capa de aire detrás, se obtiene:

$$\tan \beta = 2\beta \left(1 - \left(\frac{\beta}{\beta_0} \right)^4 \right) - 1 \quad (4.124)$$

En la , la curva $\tan \beta$ y la función $2\beta(1 - \beta^4/\beta_0^4) - 1$ están trazadas sobre el eje β para el valor de β_0 correspondiente al ejemplo elegido:

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{f_0}{f_{B1}}} = 3.35 \quad (4.125)$$

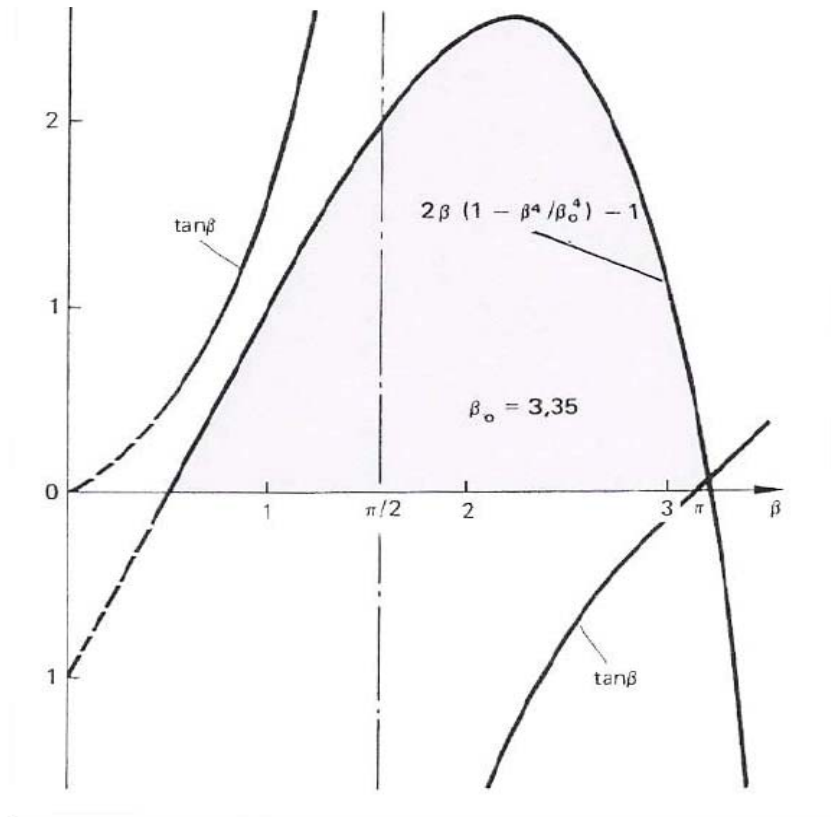


Figura 4.8. Solución gráfica de la ecuación (4.124) para $\beta_0 = 3.35$

La región para valores pequeños de β se muestra con trazo discontinuo para indicar que las aproximaciones realizadas para k_1 , k_2 y k_3 ya no son válidas ahí. Pero no es probable que esto vaya a cambiar nada, ya que en esta región no puede existir ninguna intersección entre las curvas correspondientes a los lados derecho e izquierdo de la ecuación (4.124). También, en las proximidades de $\beta = \pi/2$, donde la placa libre

en el espacio tiene su frecuencia propia más baja, y donde los cálculos aproximados de este estudio son válidos, las curvas están claramente separadas. La primera intersección se produce cerca de β_0 , luego la frecuencia propia más baja se encuentra cerca de la resonancia del sistema masa-resorte. Ciertamente, esto no es un resultado accidental provocado por el ejemplo elegido. Se desprende de la fuerte caída de la parábola de cuarto orden en la vecindad de $\beta = \beta_0$.

Si introducimos aquí un término de perturbación (al igual que anteriormente en el cálculo del número de onda)

$$\beta = \beta_0 + \Delta\beta \quad (4.126)$$

obtenemos para la desviación relativa:

$$\frac{\Delta\beta}{\beta_0} = \frac{\tan \beta_0 + 1}{8\beta_0} \quad (4.127)$$

Lo que para nuestro ejemplo significa una desviación de sólo un 4.5%.

Resulta interesante que esta desviación desaparece completamente si $\beta = 3\pi/4$, es decir, si $L = 3\lambda_{B0}/4$. Esto se debe a que, en este caso, los movimientos propios de flexión se compensan recíprocamente sobre la longitud L . En este caso, no se produce compresión y, por tanto, la suma $(\underline{v}_{y1(L/2)} + \underline{v}_{y2(L/2)})$ se anula.

Sin duda, el resultado de la solución gráfica es esencialmente dependiente del signo del primer término del lado derecho de la ecuación (4.124). Esto significa que, de nuevo, el hecho de que $k_{3,0}^2$ sea negativo en la región $f < f_0$ juega un papel decisivo ya que no se originan ondas aéreas en la cavidad de aire, sino sólo campos próximos. Su acoplamiento con las ondas de flexión impiden que la frecuencia de flexión más baja se produzca donde lo haría para una placa libre apoyada.

5 Análisis modal experimental

5.1 Introducción

El estudio de la respuesta dinámica de una estructura compleja debida a unas determinadas condiciones de carga es a menudo un problema muy difícil de abordar mediante el uso de herramientas puramente analíticas o numéricas. No es fácil obtener un modelo matemático fiable capaz de reproducir con precisión el comportamiento dinámico de los diferentes componentes y del montaje completo. Con el fin de obtener un buen modelo que refleje adecuadamente el verdadero comportamiento dinámico, a menudo se sigue la ruta experimental.

El análisis modal experimental es un método a través del cual es posible determinar de forma práctica las características dinámicas de un sistema estructural en términos de frecuencias naturales, coeficientes de amortiguamiento y formas (o patrones) modales, a partir de las mediciones llevadas a cabo en la estructura. Dichas características son utilizadas, entonces, para formular un modelo matemático capaz de reproducir su comportamiento dinámico en condiciones reales.

El análisis modal está basado en el hecho de que la respuesta vibratoria de un sistema dinámico LTI (lineal, invariante en el tiempo) puede ser expresada como la combinación lineal de un conjunto de movimientos armónicos simples denominados modos naturales o modos propios de vibración.

En líneas generales consiste en la aplicación de una carga dinámica (natural o artificial) a la estructura bajo ensayo, con componentes en un determinado rango de frecuencias de interés. El sistema responde a todas las frecuencias, pero entrará en resonancia (máxima respuesta de amplitud) para aquellas componentes que coincidan o se aproximen a sus frecuencias naturales de vibración. Cada resonancia o máximo de la respuesta puede ser representado por un modelo físico de un grado de libertad, que consistirá en una masa puntual sostenida por un resorte sin masa y conectada con un amortiguador viscoso. Dicha masa tiene restringidos todos los movimientos excepto el que comprime el muelle y el amortiguador.

El espectro de frecuencia de la respuesta de un sistema mecánico presenta tantas resonancias como grados de libertad (MDOF, del inglés 'Multiple Degrees of Freedom') posea el sistema. A partir del análisis de la función de respuesta en frecuencia, FRF (del inglés Frequency Response Function), del sistema, se determinan los parámetros correspondientes a cada modo propio. Las frecuencias modales, así como sus correspondientes amplitudes y fases, pueden determinarse de

una forma relativamente fácil a partir de la FRF; mientras que los coeficientes de amortiguamiento son más difíciles de determinar, por lo que estos parámetros suelen medirse con un cierto grado de incertidumbre. También es posible el análisis modal a partir de las funciones de respuesta al impulso IRF (del inglés Impulse Response Function) equivalentes, obtenidas mediante la aplicación de la transformada de Fourier inversa.

Antes de describir el procedimiento de medida y análisis llevado a cabo para el estudio del comportamiento dinámico del resonador bajo ensayo, comentaremos algunos de los aspectos fundamentales del análisis modal experimental, así como los diferentes tipos existentes.

5.1.1 Conceptos básicos

Supongamos un sistema de N grados de libertad (MDOF) con amortiguamiento viscoso, cuya ecuación de equilibrio dinámico es:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (5.1)$$

donde $[M]$, $[C]$ y $[K]$ son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del sistema, respectivamente, y $\{x\}$ es el vector espacial de desplazamiento del mismo.

En condiciones de estado estacionario, y el caso de una excitación armónica $F = F_0 e^{j\omega t}$, es posible establecer la relación entre las amplitudes complejas de la respuesta $\{X\}$ y las amplitudes de las fuerzas aplicadas $\{F\}$ a partir de la matriz $[H]$ (matriz de la función de respuesta en frecuencia), de forma que:

$$\{\bar{X}\} = [H]\{F\} \quad (5.2)$$

Cada elemento de $[H]$ se corresponde a una función de respuesta en frecuencia, la cual relaciona la respuesta en la coordenada i con la fuerza en la coordenada k y viene dada por:

$$H_{ik}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_r A_{ik}}{\omega_r \xi_r + j(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} + \frac{{}_r A_{ik}^*}{\omega_r \xi_r + j(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} \right) \quad (5.3)$$

donde ${}_r A_{ik}$, ω_r y ξ_r son el residuo, la frecuencia natural y el coeficiente de amortiguamiento viscoso del modo r , respectivamente.

Una versión alternativa y más simple de la ecuación (5.3) se muestra a continuación:

$$H_{ik}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r + j\omega B_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + j2\xi_r \omega_r \omega} \quad (5.4)$$

donde el numerador, para $\omega=\omega_r$, se conoce como la constante modal.

La función de respuesta en frecuencia puede tener diferentes formas, en función de la magnitud empleada para la medición de la respuesta. Así podemos distinguir las siguientes:

Forma	Relación de magnitudes
Compliancia	Desplazamiento/Fuerza
Movilidad	Velocidad/Fuerza
Receptancia (o Inertancia)	Aceleración/Fuerza
Rigidez dinámica	Fuerza/Desplazamiento
Impedancia	Fuerza/Velocidad
Masa dinámica	Fuerza/Aceleración

Tabla 5.1. Diferentes formas de la función de respuesta en frecuencia

La función de respuesta al impulso es el equivalente de $H_{ik}(\omega)$ en el dominio del tiempo, y viene dada por:

$$h_{ik}(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_{ik} e^{s_r t} \quad (5.5)$$

donde $s_r = -\omega_r \xi_r + j\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$.

Las ecuaciones (5.3) y (5.5) representan el comportamiento de la estructura en los puntos seleccionados, siendo posible trabajar en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia. El cambio de un dominio a otro es cuestión de aplicar transformadas de Fourier.

5.1.2 Tipos de análisis modal

De la sección anterior se desprende que una primera clasificación de las técnicas de análisis modal es aquella que permite distinguir entre métodos de identificación basados en el dominio del tiempo y métodos basados en el dominio de la frecuencia. Los métodos en el dominio del tiempo pueden ser empleados siempre,

tanto para mediciones de la respuesta libre del sistema como para mediciones de la respuesta forzada, con o sin conocimiento de las fuerzas aplicadas. Los métodos en el dominio de la frecuencia se emplean fundamentalmente para vibraciones forzadas cuando las fuerzas son conocidas.

En cada uno de estos dominios, existen métodos de análisis que emplean información procedente de una única posición de respuesta, y otras que emplean información de varias posiciones de respuesta simultáneamente. Del mismo modo, en cada uno de estos casos pueden existir una o múltiples localizaciones de fuerza o excitación, lo que da lugar a la siguiente clasificación (los tres primeros métodos son los más utilizados):

- SISO (del inglés Single-Input Single-Output): se mide una única respuesta debida a una única fuerza de excitación. Para el análisis SISO, la matriz FRF se define por:

$$\{X_1\} = [H_{11}]\{F_1\} \quad (5.6)$$

- SIMO (Single-Input Multiple-Output): se miden múltiples respuestas debidas a una única excitación. Para el análisis SIMO, la matriz FRF queda definida por un vector columna:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_{11} \\ H_{21} \\ \vdots \\ H_{i1} \end{Bmatrix} \{F_1\} \quad (5.7)$$

- MIMO (Multiple-Input Multiple-Output): se miden múltiples respuestas debidas a diversas excitaciones. Para el análisis MIMO, la matriz FRF se define como:

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1k} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{i1} & H_{i2} & \cdots & H_{ik} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

- MISO (Multiple-Input Single-Output): se mide una única respuesta debida a múltiples fuerzas. Para el análisis MISO, la matriz FRF queda definida por un vector fila:

$$\{X_1\} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_k \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

El uso de múltiples entradas está orientado a la excitación, mediante agitadores, de estructuras de gran tamaño o complejidad por dos motivos fundamentales: conseguir una suficiente distribución de la energía a lo largo de las mismas, y evitar comportamientos no lineales. Por otro lado, el uso de múltiples salidas simultáneas es recomendable para optimizar la consistencia de los datos.

Una tercera clasificación a considerar en ambos dominios permite distinguir entre métodos de análisis directos e indirectos. Los métodos directos estiman las características dinámicas del sistema en términos de rigideces, masas y coeficientes de amortiguamiento; es decir, resuelven las matrices de la ecuación (5.1). Los métodos indirectos evalúan las propiedades asociadas con cada modo de vibración, los denominados parámetros modales: frecuencia natural, coeficiente de amortiguamiento y constante modal (amplitud y fase), de acuerdo a las ecuaciones (5.3), (5.4) y (5.5).

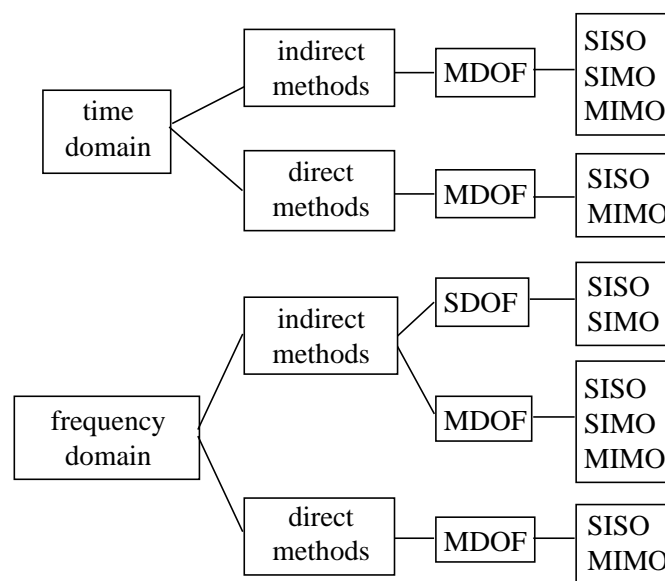


Figura 5.1. Clasificación de los métodos de análisis modal

Por último, es posible establecer diferentes tipos de análisis en base a la técnica de excitación empleada para la medición de la respuesta del sistema (libre o forzada). De acuerdo a esto, podemos distinguir entre los siguientes tipos de ensayo:

- Ensayo de impacto
- Ensayo con excitador (vibrador o agitador)
- Análisis modal operacional

5.1.2.1 Ensayo de impacto

Esta técnica de excitación para el análisis modal es la más utilizada en la práctica, y emplea como excitador un martillo de impacto. La duración del impacto es normalmente muy corta en comparación con el tiempo de medida de la respuesta, y permite excitar rápidamente frecuencias hasta unos 5-10 kHz, dependiendo del tamaño del martillo.

Con este tipo de excitación se consigue excitar un gran número de modos de vibración, tanto de flexión como de torsión, y ha demostrado ser una forma sencilla, económica y efectiva de excitar estructuras en mediciones de campo. Además, no se carga en exceso la estructura, lo que es importante para el análisis de estructuras ligeras en las que un aumento de la masa puede ocasionar cambios en las frecuencias propias de un punto a otro de medida. No se requiere de un montaje especial, tan sólo es necesario mover la fuente de excitación ('roving hammer test') de un punto a otro del sistema estructural mientras el acelerómetro (o acelerómetros) permanece en una posición fija. En casos en los que no sea posible la excitación de la estructura en todos los puntos deseados de la misma, se mantiene fija la excitación en un punto y es el acelerómetro (o acelerómetros) el elemento móvil ('fixed hammer test' o 'roving accelerometer test').

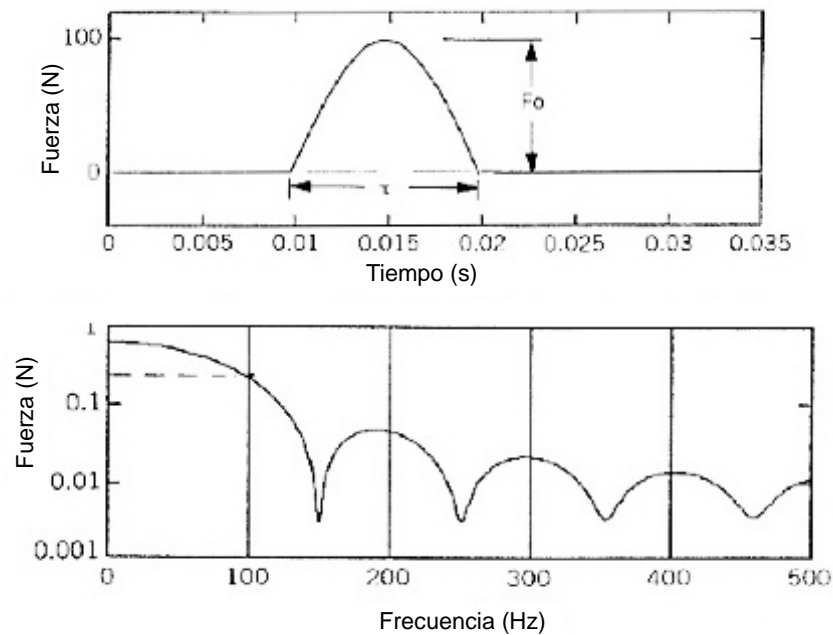


Figura 5.2. Representación temporal y contenido en frecuencia de la fuerza aplicada mediante la excitación por impacto.

En la Figura 5.2 se muestra la representación temporal de la energía transmitida por el impacto en forma de pulso de fuerza, así como su contenido en frecuencia. El valor de la frecuencia de corte f_c , donde la magnitud de la respuesta disminuye entre 10 y 20 dB respecto al valor máximo, determina el rango útil de excitación, de forma que para frecuencias superiores la estructura no recibe energía suficiente para excitar sus modos propios de vibración. Existe una relación inversa entre la primera frecuencia de corte f_c y la duración del pulso τ , por lo que para aumentar el rango de frecuencia útil es necesario que el pulso sea de corta duración.

Llegados a este punto, es necesario tener en cuenta dos factores fundamentales en la realización de este tipo de ensayos. El primero es la elección de la punta del martillo, ya que el rango de frecuencia excitado se controla principalmente mediante la dureza de la punta elegida; si esta es demasiado blanda no se excitarán todos los modos de interés de forma adecuada, y no se obtendrá una buena coherencia entre la excitación y la respuesta. El segundo es la elección de una ventana apropiada para el análisis espectral de las mediciones. En general, para estructuras débilmente amortiguadas, la respuesta al impulso no se hará cero al final del intervalo de análisis. Como explicaremos más adelante con mayor detalle, esto podría provocar errores significativos en la estimación espectral de las señales registradas, por lo que es necesario emplear una ventana de ponderación temporal para cumplir con los requisitos de periodicidad inherentes a la Transformada de

Fourier. En ensayos de impacto se debe emplear un ancho de banda lo más estrecho posible y una elevada resolución del espectro (ventana temporal de mayor duración).

Por último, esta técnica también presenta ciertos inconvenientes. En primer lugar, debido a la gran cantidad de energía que se puede transmitir con este tipo de excitación, se puede provocar que la estructura entre en una zona de comportamiento no lineal. Además, para excitar grandes estructuras es necesario aplicar grandes picos de fuerza, lo que puede ocasionar daños locales en las mismas. Por otro lado, esta excitación requiere de cierta destreza por parte del operador para evitar grandes variaciones de la fuerza aplicada de una medición a otra, así como producir doubles impactos. La excitación con doubles impactos, que no pueden ser compensados mediante ningún tipo de procesado, producirá que los datos obtenidos del análisis sean erróneos.

5.1.2.2 Ensayo con excitador

Esta técnica de excitación se emplea frecuentemente en el análisis de estructuras mecánicas de mayor complejidad. El ensayo con excitador ofrece una mayor repetibilidad que el ensayo de impacto, y puede ser utilizado para análisis MIMO. Además, permite emplear diferentes tipos de excitación (barrido sinusoidal, excitación aleatoria, excitación pseudo-aleatoria, salva aleatoria, pulso periódico o excitación aleatoria periódica). Sin embargo, este tipo de ensayo normalmente requiere de una configuración más dificultosa, más equipamiento y canales de medida, y una gran destreza y habilidad por parte del operador, u operadores.

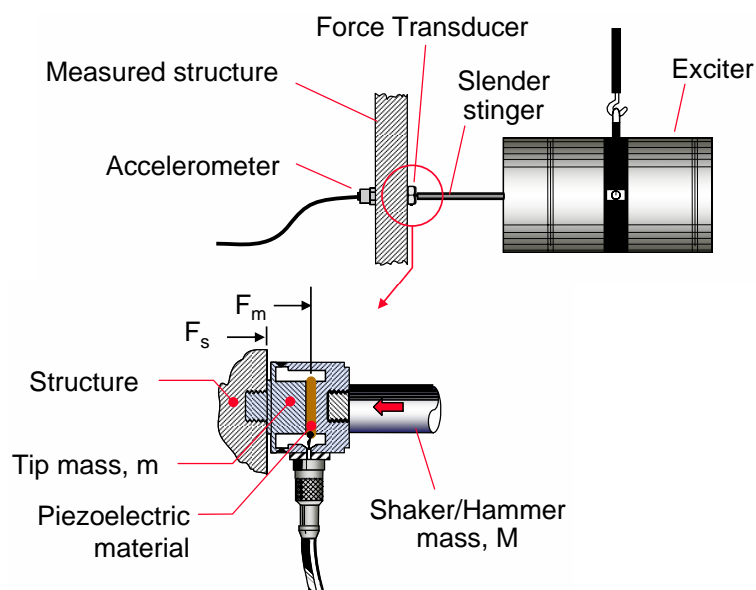


Figura 5.3. Acoplamiento excitador-transductor-estructura.

El acoplamiento del excitador a la estructura bajo ensayo se realiza normalmente por medio de un perno o de una varilla. En el extremo en contacto con la estructura de estos elementos, se sitúa el transductor de fuerza. El uso de la varilla como método de acoplamiento ofrece algunas ventajas, como la ausencia de momento de excitación y de carga de inercia rotacional, la protección del excitador y el transductor, y una mayor facilidad para el posicionamiento del excitador. Este elemento presenta una elevada rigidez axial, pero una reducida rigidez de flexión. Aunque las mediciones de fuerza y aceleración no se ven afectadas por la compliancia de la varilla, es necesario realizar una pequeña corrección para determinar correctamente la excitación aplicada (véase la Figura 5.3):

$$\left. \begin{aligned} F_s &= (m + M)\ddot{x} \\ F_m &= M\ddot{x} \end{aligned} \right\} F_s = F_m \frac{m + M}{M} \quad (5.10)$$

La disposición del excitador y de la estructura para la conexión de ambos es un factor importante a tener en este tipo de ensayos para obtener mediciones fiables y, por tanto, debe realizarse de forma cuidadosa. En la Figura 5.4 se muestran diferentes montajes posibles del conjunto excitador-estructura, en los que se indica el correspondiente tipo de fuerza de reacción del excitador, así como un ejemplo de disposición inapropiada de los mismos.

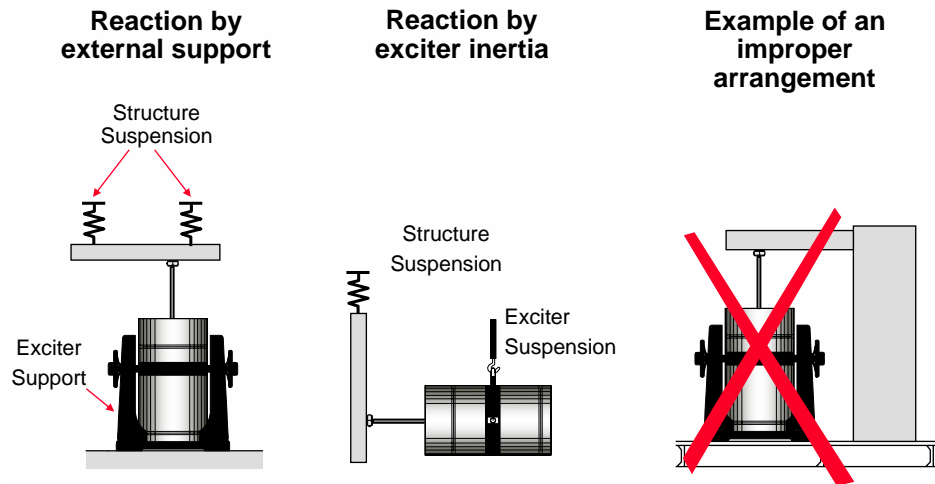


Figura 5.4. Posibles disposiciones del conjunto excitador-estructura (y correspondiente fuerza de reacción del excitador).

En este tipo de ensayos es posible emplear diferentes métodos de excitación, siendo los más frecuentemente utilizados los que se detallan a continuación:

- Barrido sinusoidal. La excitación sinusoidal resulta de especial utilidad en el estudio de no linealidades de sistemas, por ejemplo de la distorsión armónica. Para una excitación de banda ancha se realiza un barrido de señales sinusoidales en el margen de frecuencia de interés, con una velocidad tal que se cumpla la condición de onda cuasi-estacionaria.

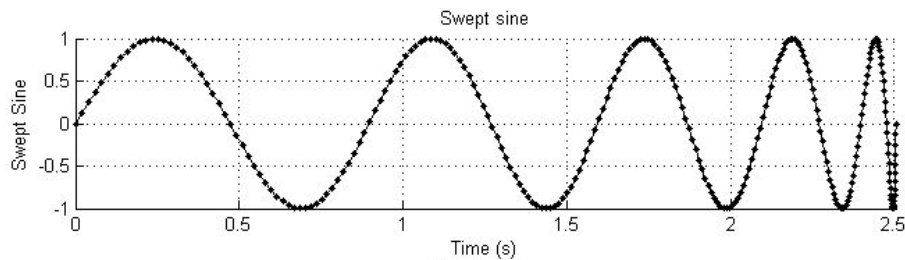


Figura 5.5. Representación temporal de la señal de barrido sinusoidal

Este tipo de excitación ofrece las siguientes ventajas: bajo factor de cresta ($\sqrt{2}$), alta relación señal-ruido (SNR), buen control de fuerza de entrada, posibilidad de estudio de no linealidades. Por el contrario, presenta las siguientes desventajas: es una excitación muy lenta, y no es posible la aproximación lineal de sistemas no lineales.

- Excitación aleatoria. Las señales aleatorias presentan una variación aleatoria tanto de amplitud como de fase, por lo que su promediado proporcionará una estimación lineal óptima en caso de no linealidades. Se caracterizan por su densidad espectral de potencia G_{xx} (o PSD, del inglés Power Spectral Density) y su densidad de probabilidad de amplitud $p(a)$.

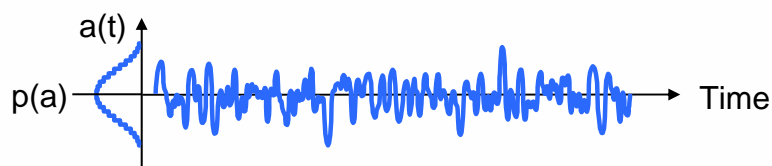


Figura 5.6. Representación temporal y densidad de probabilidad de amplitud de una señal aleatoria

Este tipo de excitación presenta las siguientes ventajas: proporciona la mejor aproximación lineal de un sistema, pueden ser limitadas en banda de acuerdo a un rango de frecuencias de interés (zoom), y presenta un factor de cresta y una relación señal-ruido adecuadas. Sin embargo, tiene las siguientes desventajas: necesidad de promediado debido a su carácter aleatorio, y aparición de leakage en la estimación espectral si la señal no es periódica en el tiempo de análisis.

- **Salva aleatoria.** Este tipo de excitación proporciona la mejor aproximación lineal de sistemas no lineales y, al igual que la excitación aleatoria, permite emplear la función zoom. Presenta las siguientes ventajas: no introducen leakage si se emplea una ventana rectangular, y es una excitación relativamente rápida. Por el contrario: el factor de cresta y la relación señal-ruido no son óptimos, y puede requerir de una ponderación temporal (ventana) especial.



Figura 5.7. Representación temporal de una señal de salva aleatoria

- **Excitación pseudo-aleatoria.** La excitación pseudo-aleatoria no es más que un fragmento de señal aleatoria repetido cada periodo temporal T_s . De forma similar a las señales aleatorias, este tipo de señales están caracterizadas por su espectro de potencia o amplitud RMS G_{xx} y su densidad de probabilidad de amplitud $p(a)$. Además, si el periodo temporal T_s coincide con la duración de la ventana de análisis FFT, las líneas espectrales de la señal coinciden con las líneas en frecuencia del analizador, lo que evitaría la aparición de leakage con el uso de ventanas rectangulares. Además, tampoco sería necesario el promediado de no linealidades del sistema.

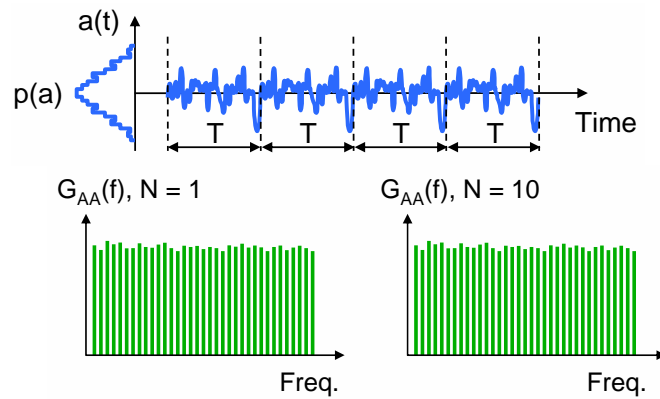


Figura 5.8. Representación temporal y densidad de probabilidad de amplitud de una señal pseudo-aleatoria (arriba), y espectro resultante del promediado espectral de N periodos de la señal (abajo).

Las ventajas de este tipo de excitación son las siguientes: ausencia de leakage (para ventana rectangular), método de excitación rápido, posibilidad de zoom (pueden ser limitadas en banda para un determinado rango de frecuencias de interés), y factor de cresta y relación señal-ruido apropiados. Sin embargo, no permite la aproximación lineal de sistemas no lineales.

Un tipo especial de excitación pseudo-aleatoria es la señal de frecuencia modulada pulsada o 'chirp', la cual consiste en un barrido sinusoidal repetido cada intervalo temporal T . Presenta las ventajas y desventajas de las señales pseudo-aleatorias pero con un menor factor de cresta ($\sqrt{2}$). Además presenta una forma de espectro ideal: su espectro de amplitud es plano, y el espectro de fase suave. Su principal aplicación es la medición de estructuras con un comportamiento no lineal.

- Excitación aleatoria periódica. Es una señal pseudo-aleatoria que cambia en el tiempo, repitiéndose varios ciclos antes de cada cambio de señal. Los primeros ciclos se corresponden con la respuesta transitoria del sistema; mientras que la información analizada es aquella del último ciclo, correspondiente a la respuesta en estado estacionario del mismo.

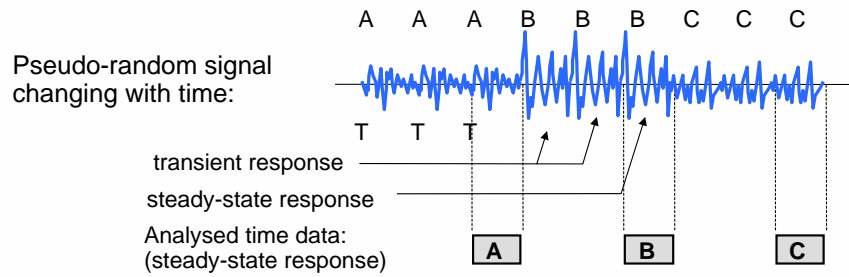


Figura 5.9. Representación temporal de una señal de excitación aleatoria periódica.

Así, es posible definir la excitación aleatoria periódica como una combinación de señal aleatoria y señal pseudo-aleatoria que no presenta leakage en el análisis, y supone la mejor aproximación lineal del sistema. Por el contrario, el tiempo de test es mayor que para señales aleatorias o pseudo-aleatorias.

- Pulso periódico. Podría considerarse un caso especial de señal pseudo-aleatoria y consistente en un pulso rectangular, Hanning o gaussiano con un ancho Δt y repetido cada intervalo ΔT , siendo ambos parámetros definibles por el usuario. El espectro discreto para un pulso rectangular presenta una curva envolvente con forma de $\sin x/x$.

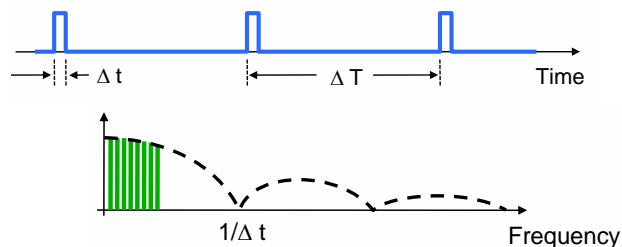


Figura 5.10. Representación temporal y espectro de un pulso rectangular periódico.

Presenta las siguientes ventajas: es un método de excitación rápido y fácil de implementar, se puede evitar el leakage con el uso de una ventana rectangular, es posible emplear ponderación temporal transitoria y exponencial para incrementar la relación señal-ruido, así como la supresión de reflexiones con ponderación temporal transitoria. En cuanto a sus desventajas: no es posible la aproximación lineal de sistemas no lineales, presenta un elevado factor de cresta y nivel de pico que podría excitar no linealidades en el sistema, no es posible el

uso de zoom, y la ponderación especial requerida para aumentar la relación señal-ruido puede introducir leakage.

En la Tabla 5.II se muestra, a modo de resumen, el método de excitación adecuado en función de cuál sea la aplicación de las mediciones que se pretenden llevar a cabo.

Aplicación	Técnica de excitación
Estudio de no linealidades	Excitación de barrido sinusoidal
Análisis de sistemas ligeramente no lineales	Excitación aleatoria
Análisis de sistemas lineales	Excitación pseudo-aleatoria
Mediciones de campo	Excitación de impacto
Mediciones de campo de alta resolución	Excitación de impacto aleatoria

Tabla 5.II. Guía para la elección del método de excitación según su aplicación.

5.1.2.3 Análisis modal operacional

El análisis modal operacional se basa en la medida de la respuesta de la estructura empleando las propias fuerzas naturales que actúan sobre la misma, es decir, permite obtener una descripción modal de la estructura bajo sus condiciones de operación. Puesto que las fuerzas de entrada al sistema no se pueden medir, tan sólo se dispondrá de las mediciones de la respuesta del mismo, no siendo posible el cálculo estricto de sus FRFs. En estos ensayos con excitación ambiental se supone que las fuerzas desconocidas se aplican simultáneamente y que, además, la fuerza de entrada es un ruido blanco; es decir, no es función de la frecuencia y tiene un espectro con valor medio constante para cada frecuencia. Otra alternativa es el uso de señales de referencia en sustitución de las fuerzas de entrada desconocidas.

Este tipo de análisis modal se emplea en aquellos casos en los que no es conveniente excitar la estructura bajo análisis por cualquiera de las técnicas de excitación anteriores. En algunos casos por la dificultad que supone excitarlas artificialmente y de forma controlada debido a su tamaño, forma o localización. En otros, por la aparición de no linealidades en el comportamiento de la estructura debidas a un elevado nivel de excitación artificial. Por otro lado, el equipamiento de excitación y medida para grandes estructuras es extremadamente caro y pesado, como se puede observar en la Figura 5.11. Además, el propio equipamiento podría originar vibraciones añadidas en la estructura como consecuencia de las fuerzas ambientales existentes y a las que tanto la estructura como el equipamiento están sometidos. Para pequeñas estructuras que puedan ser ensayadas en laboratorio, o

grandes estructuras que puedan ser excitadas artificialmente sin problemas significativos, suele ser preferible el análisis modal experimental tradicional.



Figura 5.11. Ensayos de vibración forzada en grandes estructuras: a) puente atirantado Tatara; b) puente colgante Yeongjong; c) agitador de gran fuerza.

Las principales ventajas de este tipo de ensayo son las siguientes:

- Es necesario un tiempo menor para su realización, ya que tan sólo se deben colocar los equipos de medida.
- Es más barato, puesto que no es necesario disponer de equipos excitadores y puede realizarse in situ.
- El ensayo no interfiere ni interrumpe el normal funcionamiento de la estructura.
- La respuesta medida es representativa de las condiciones reales de operación del sistema.
- Se evita aplicar cargas artificiales con el consiguiente daño potencial de la estructura.

Sin embargo, este tipo de ensayo suele producir respuestas pequeñas del sistema estructural y, frecuentemente, contaminadas con ruido. Por tanto, se requieren

equipos muy sensibles y, debido al desconocimiento de las fuerzas de excitación, el análisis de los datos registrados debe realizarse con especial cuidado.

5.1.3 Métodos de identificación modal

En la actualidad existen numerosos métodos o algoritmos, tanto en el dominio del tiempo como de la frecuencia, para la identificación de los modos propios de un sistema y el cálculo de los parámetros modales correspondientes: frecuencias naturales, coeficientes de amortiguamiento y constantes modales (relacionadas con la forma o perfil modal).

Existen diferentes métodos para la obtención de los parámetros modales de sistemas mecánicos, tanto analíticos como experimentales, tal y como se muestra en la Figura 5.12. En la actualidad se emplean cada vez más las técnicas de modelado por elementos finitos, con extracción de los parámetros modales a partir de dicho modelo de elementos finitos, para entender y resolver problemas de dinámica estructural. Por supuesto, para este mismo propósito también se emplea el análisis modal experimental.

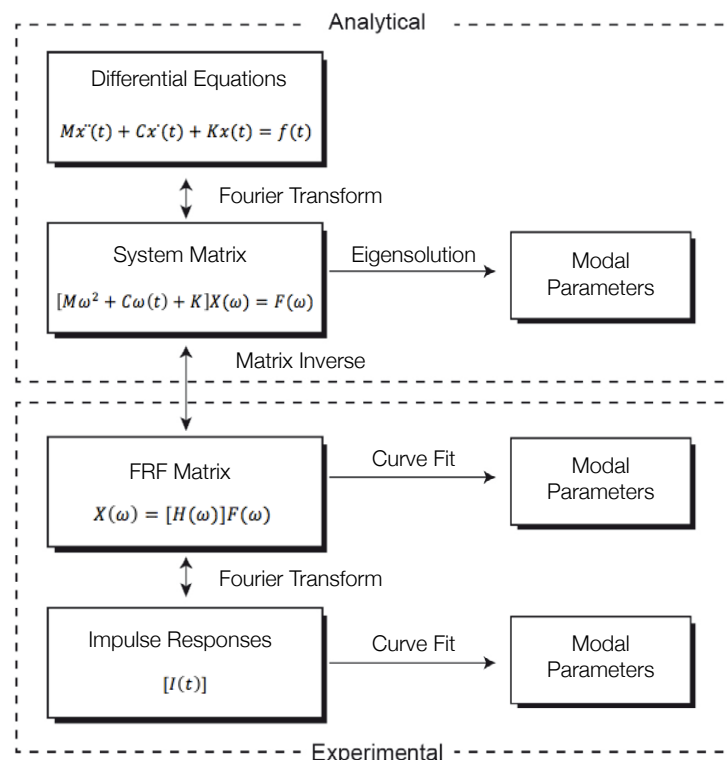


Figura 5.12. Métodos para la caracterización modal de sistemas estructurales.

La mayor parte del análisis modal experimental moderno se basa en la aplicación de una técnica de estimación de los parámetros modales (ajuste de curvas)

a un conjunto de mediciones de la FRF. Como se indica en la Figura 5.12, también es posible transformar al dominio temporal estas FRFs y aplicarles técnicas de ajuste de curvas a sus IRFs equivalentes. En general, el ajuste de curvas es un proceso de ajuste de una expresión matemática a un conjunto de puntos correspondientes a datos empíricos. Esto se consigue utilizando la técnica de mínimos cuadrados, que consiste en minimizar el error cuadrático entre la función analítica y los datos medidos.

Los diferentes métodos de ajuste de curvas existentes se clasifican según las siguientes categorías:

- SDOF Local
- MDOF Local
- Global
- Multi-Referencia (o Poli-Referencia)

Los métodos SDOF permiten estimar los parámetros modales de un único modo de una vez; mientras que los métodos MDOF, Global y Multi-Referencia permiten estimar dos o más modos de forma simultánea. Por otro lado, los métodos locales se aplican a una sola FRF; mientras que los métodos Global y Multi-Referencia se aplican a un conjunto completo de FRFs de una vez.

Los métodos SDOF Locales son los más fáciles de usar, y deben utilizarse siempre que sea posible. Estos métodos SDOF se pueden aplicar a la mayoría de conjuntos de datos FRF con un bajo acoplamiento modal, tal y como se muestra en la Figura 5.13. Los métodos MDOF deben emplearse en casos de alto acoplamiento modal.

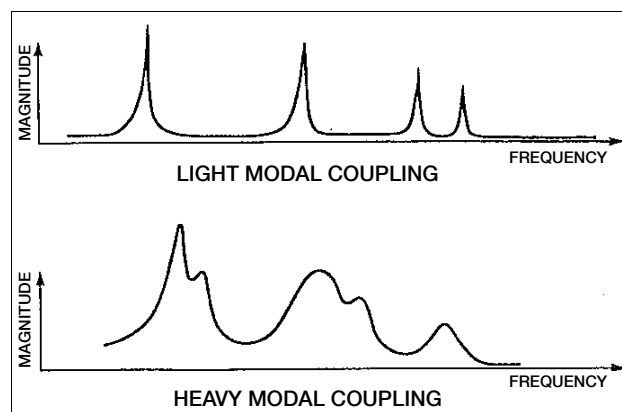


Figura 5.13. Ejemplos de alto y bajo acoplamiento modal.

Los métodos Globales funcionan mucho mejor que los métodos MDOF en casos con modos locales. Los métodos Multi-Referencia, por su parte, pueden encontrar raíces repetidas (modos estrechamente acoplados) cuando otros métodos no.

A continuación describiremos los métodos SDOF Locales por ser los métodos más sencillos de estimación de parámetros modales de estructuras y adaptarse sobradamente a las necesidades del presente estudio; cuyo objetivo fundamental es identificar las primeras frecuencias naturales de vibración del resonador bajo ensayo, y no tanto la elaboración de un modelo modal completo del sistema resonante.

5.1.3.1 Métodos SDOF Locales: Peak Picking

Estos métodos se desarrollan en el dominio de la frecuencia y se basan en la identificación de las resonancias o picos de amplitud de la FRF, correspondientes a las frecuencias naturales del sistema. En la vecindad de una resonancia, la FRF está dominada por la contribución de dicho modo de vibración, pudiendo asumir que la contribución de otros modos cercanos despreciable. Mientras se cumpla esta suposición, válida para estructuras poco amortiguadas y modos desacoplados (suficientemente separados), la FRF de un sistema MDOF o de una estructura real puede ser tratada momentánea y localmente como la FRF de un sistema SDOF.

La frecuencia de la resonancia o de pico ω_{peak} en la FRF determina la frecuencia modal ω_n . Esta frecuencia de resonancia, la cual también depende de la resolución espectral de las mediciones, no es exactamente igual a la frecuencia modal pero es una buena aproximación, especialmente para estructuras poco amortiguadas. El pico de resonancia debería aparecer a la misma frecuencia en la mayoría de las mediciones de la FRF, salvo para aquellas mediciones correspondientes a líneas nodales (magnitud cero) del perfil modal.

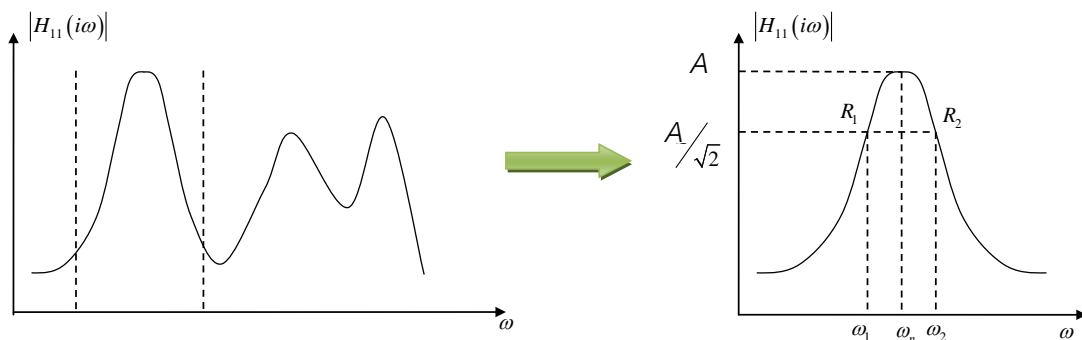


Figura 5.14. Caracterización modal basada en el modelo SDOF a partir del ajuste de curvas.

El ancho del pico de resonancia es una medida del amortiguamiento modal, y también debería ser la misma para todas las mediciones de la FRF. El coeficiente de amortiguamiento modal se estima mediante el denominado método de potencia mitad (-3 dB), de acuerdo con:

$$\xi_n = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} \quad (5.11)$$

A partir de mediciones de la FRF en forma de compliancia (desplazamiento/fuerza) o receptancia (aceleración/fuerza), los valores de pico de la parte imaginaria de las FRFs se toman como las componentes de forma modal. A partir de FRFs en forma de movilidad (velocidad/fuerza), son los valores de pico de la parte real los que se toman como componentes de forma modal. Esto se denomina método en cuadratura de ajuste de curvas.

Este método de identificación, no obstante, presenta las siguientes desventajas:

- Depende del valor de pico de la FRF, que es difícil de medir con exactitud y, por tanto, no siempre es capaz de facilitar datos precisos del modelo.
- La estimación del coeficiente de amortiguamiento se basa únicamente en los puntos de potencia mitad (-3 dB). Estos puntos generalmente han de ser interpolados ya que es improbable que coincidan con las líneas de frecuencia de la FRF.
- Requiere del conocimiento de la señal de entrada (excitación).
- No es capaz de manejar ruido de forma eficiente.
- La suposición del comportamiento como un sistema MDOF en la vecindad de la resonancia no siempre es válido, en la práctica es probable que los modos adyacentes contribuyan en mayor o menor medida a la respuesta del sistema.

5.2 Objetivo del análisis modal

El análisis modal que se va a llevar a cabo en el presente estudio tiene por objeto caracterizar el comportamiento dinámico del sistema resonante bajo ensayo, en base a sus modos propios de vibración.

Teniendo en cuenta que este tipo de sistemas resonantes se emplean como absorbentes de baja frecuencia, el análisis se centrará fundamentalmente en la identificación de los primeros modos propios del sistema, localizados dentro de su rango de trabajo efectivo. Así, el margen de frecuencias de interés para el análisis FFT se establece entre 1 y 300 Hz, aproximadamente; mientras que la identificación modal se llevará a cabo en un rango más reducido, de 1 a 100 Hz. Además, conforme aumenta la frecuencia la densidad y el acoplamiento modal se incrementa, resulta más complejo el estudio de los modos propios, como se podrá comprobar en la zona superior del margen de frecuencias de análisis.

5.3 Descripción del resonador bajo ensayo

El resonador está formado por una placa de aglomerado de madera, o tablero DM, fijada tanto en sus extremos como a lo largo de su eje de simetría transversal a unos rastreles de madera de pino, de sección cuadrada de 0.045 m de lado, tal y como se muestra en la Figura 5.15. Estos listones de madera conforman un marco doble que sirve de soporte de la placa para su montaje en una pared rígida, el suelo en este caso; elemento este último que completa el sistema resonante. Así, el conjunto placa-soporte-pared rígida crea en su interior dos cavidades de aire separadas físicamente y de idénticas dimensiones. Dichas cavidades se comportan como sendos elementos elásticos sobre los que oscila la placa a la que ambas se encuentran acopladas.

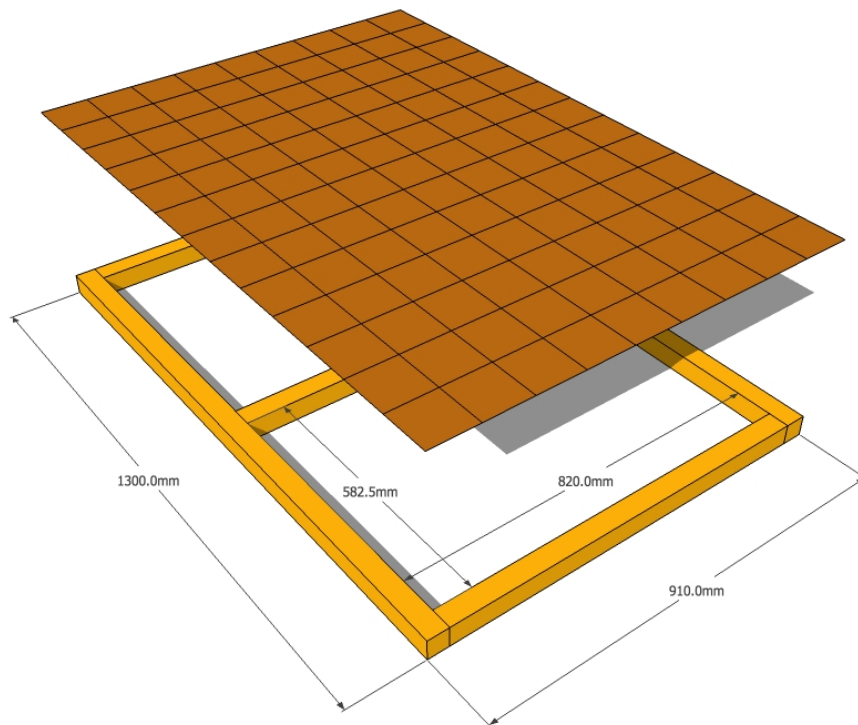


Figura 5.15. Esquema gráfico acotado de los elementos que conforman el resonador.

Las características físicas de la placa de aglomerado utilizada como tapa del resonador han sido determinadas previamente en [1], las cuales se resumen a continuación.

Las características estructurales de la placa, asumiendo que se trata de un material isótropo y su comportamiento estructural es lineal, son las siguientes:

- Densidad volumétrica, ρ : 945.5 kg/m³
- Coeficiente de Poisson: 0.3
- Módulo de Young, E : 5.1·10⁹ N/m²

Las dimensiones de la placa son:

- Ancho, L_x : 0.91 m
- Largo, L_y : 1.3 m
- Espesor, h : 0.003 m

Por último, las dimensiones de las cavidades son las siguientes:

- Ancho, L_{Cx} : 0.82 m
- Largo, L_{Cy} : 0.5825 m
- Espesor, d : 0.045 m

5.4 Procedimiento de medida

En este apartado se describe el procedimiento de medida empleado para el análisis modal experimental del resonador objeto de ensayo; recordemos que este tipo de análisis no se encuentra regulado por ninguna normativa técnica. En dicho procedimiento se indica la instrumentación de medida utilizada, así como su conexión y configuración; se detalla la metodología seguida para la medición y el posterior procesamiento de la respuesta vibratoria; y, por último, se detalla el proceso de evaluación del comportamiento dinámico del resonador en términos de sus modos propios de vibración.

5.4.1 Instrumentación de medida

Los equipos utilizados para las mediciones experimentales de la respuesta dinámica del resonador se enumeran a continuación:

- Acelerómetros piezoeléctricos PCB Piezoelectronics, modelo 333B50 (4 unidades).

La elección de este modelo de acelerómetro responde no sólo a su competencia técnica para la aplicación que nos ocupa, sino también a una mayor disponibilidad de unidades respecto de otros modelos disponibles en el laboratorio.

En cuanto a sus características técnicas, ofrecen una respuesta en frecuencia, 0.5 - 3000 Hz, que se extiende muy por encima del margen de interés en este análisis; y su sensibilidad, 1000 mV/g, es apropiada para los niveles de vibración que se generarán en la placa del resonador. Otro parámetro importante a considerar es su masa, que no debe ser superior a una décima parte de la masa del elemento vibrante para no alterar de forma significativa los niveles y frecuencias de vibración en el

punto de medida. Sus 7.5 g son despreciables frente al peso de la placa del resonador.

- Sistema de adquisición NetdB 12 de 01dBMetraavid.

Unidad hardware para la adquisición, generación y análisis en tiempo real de señales vibroacústicas. Dispone de un total de 12 canales de entrada, de los cuales sólo 4 se encuentran activos en la configuración actual del equipo, y 2 canales de salida. Todas las conexiones de I/O se realizan mediante conectores BNC, mientras que el control del equipo se realiza según el protocolo Ethernet (IEEE 802.3) a través de un conector RJ45.

- Software dBFA Suite.

Software para el control y la configuración del sistema de adquisición NetdB12.

- Ordenador.
- Excitador de vibración Brüel & Kjaer, modelo 4809.

Es un excitador de vibración de pequeño tamaño, por lo que no requiere de una fuente de alimentación demasiado potente. Los conectores de entrada son propietarios de la marca Brüel & Kjaer, aunque presentan compatibilidad con conectores banana.

- Amplificador de potencia InterM, modelo M700.

Se trata de un amplificador de gran potencia orientado a otro tipo de aplicaciones más exigentes que la que nos ocupa. Puesto que no se requiere una gran potencia de alimentación, es necesario controlar cuidadosamente la ganancia aplicada a la señal eléctrica de excitación para no saturar la etapa de entrada del excitador de vibración.

- Calibrador de vibración Brüel & Kjaer, modelo 4294.

El calibrador B&K 4294 permite un rápido ajuste o verificación de la instrumentación de medida de vibraciones a un nivel de aceleración estándar de 10 ms^{-2} (carga de 0-70 g). La señal de referencia puede ser empleada adicionalmente para calibraciones de velocidad y

desplazamiento, a 10 mms^{-1} y $10 \text{ }\mu\text{m}$ respectivamente. El calibrador consta de un excitador electromagnético impulsado por un oscilador de cristal a una frecuencia de 159.15 Hz (1000 rads^{-1}). Emplea servo-retroalimentación a través de un pequeño acelerómetro situado bajo la placa vibratoria para mantener un nivel de vibración constante y preciso independientemente de la masa del transductor bajo prueba.

- Cableado.

Los diversos tipos de cableado necesarios se detallan en el siguiente apartado, dedicado a la conexión de los equipos.

- Multímetro portátil HC 874.

Empleado para comprobar que la intensidad de salida del amplificador de potencia no sobrepasa la intensidad máxima soportada por el excitador de vibración, y evitar así un daño potencial en el mismo..

5.4.2 Conexión del equipamiento de medida

La conexión de los equipos empleados se realiza de acuerdo al diagrama de la Figura 5.16.

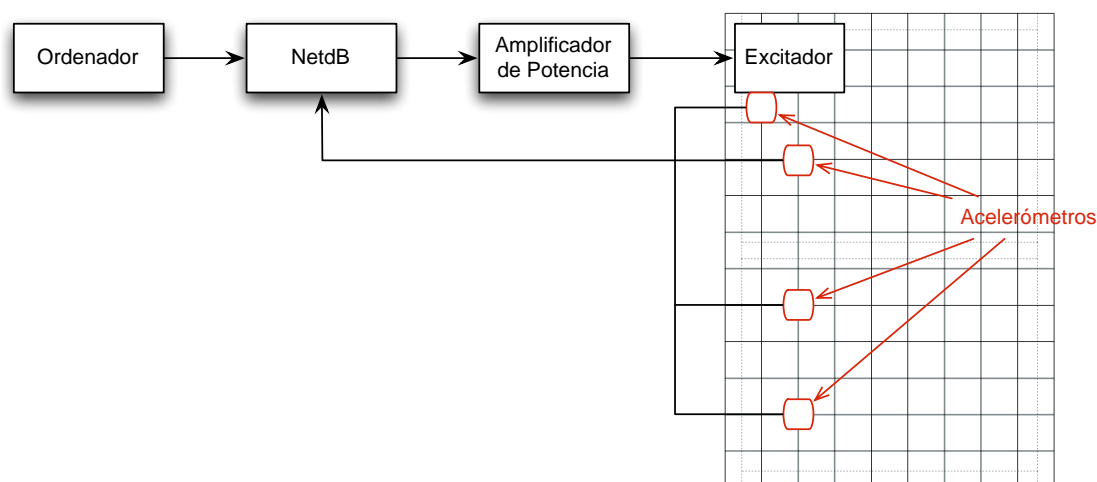


Figura 5.16. Diagrama de conexión del equipamiento de medida

En primer lugar, el sistema de adquisición y análisis de datos NetdB se conecta a la tarjeta de red del ordenador mediante un cable Ethernet con conectores RJ45. Para una correcta comunicación entre el sistema NetdB y el ordenador, es necesario

realizar la configuración de red del NetdB y actualizar la dirección IP asignada al mismo en el fichero de registro del software dBFA Suite.

A cada uno de los cuatro canales de entrada activos del sistema NetdB se conectan, mediante cables BNC-Microdot, sendos acelerómetros. Por último, uno de los dos canales de salida del sistema NetdB se conecta a una de las dos entradas del amplificador de potencia mediante un cable BNC-banana. La salida correspondiente del amplificador se dirige a través de un cable par-banana al excitador de vibraciones.

Antes de comenzar con las mediciones es necesario ajustar la ganancia de salida tanto del generador de señal (NetdB) como del amplificador de potencia para generar un nivel de aceleración vibratoria en la placa suficientemente elevado respecto del ruido de fondo y, al mismo tiempo, evitar sobrepasar la intensidad máxima soportada por el excitador de vibración. Para ello, se colocará el multímetro en circuito abierto entre la salida del amplificador de potencia y la entrada del excitador de vibraciones. Con la ganancia del amplificador situada al mínimo, se genera una señal de excitación eléctrica de idénticas características a la que se empleará durante las mediciones y se ajusta tanto la ganancia del amplificador como la tensión de salida eléctrica del sistema NetdB hasta obtener un nivel de aceleración adecuado. Se debe prestar especial cuidado en mantener un intervalo de seguridad en la intensidad aplicada al excitador respecto a la intensidad máxima soportada.

5.4.3 Excitación del resonador

5.4.3.1 Acoplamiento y montaje del excitador de vibración

Para la transmisión de la fuerza de excitación al resonador, se descartan los métodos de acoplamiento mediante perno y mediante varilla. De forma alternativa, la fuerza de excitación se transmite al panel a través de un campo magnético. Esto se consigue roscando un imán a la membrana del excitador, que por efecto del campo magnético que genera en su proximidad provoca una fuerza de atracción sobre una chapa metálica pegada a la placa del resonador. Esta fuerza es inversamente proporcional al desplazamiento relativo del imán respecto de la chapa, o lo que es lo mismo, a la distancia entre ambos elementos. De esta forma se consigue una excitación forzada del resonador sin contacto directo con el mismo.

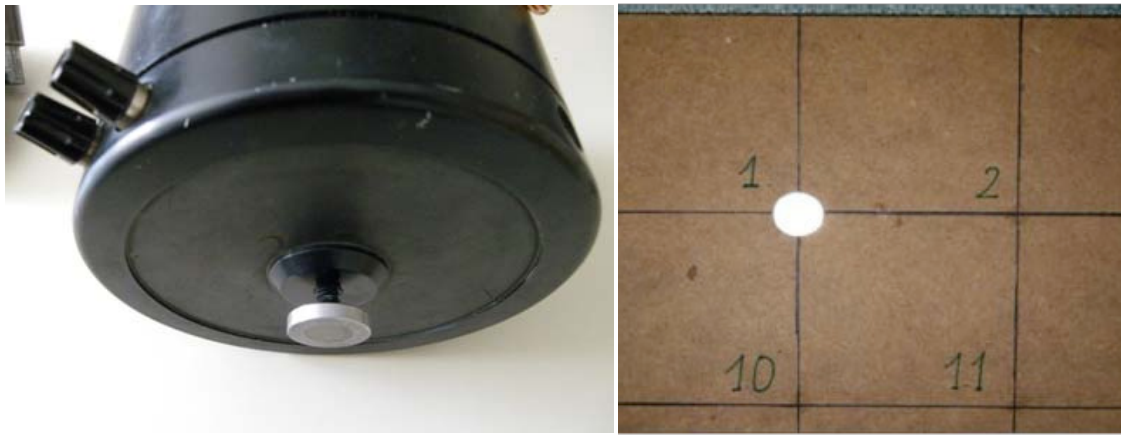


Figura 5.17. Acoplamiento magnético del excitador (izquierda) a la placa del resonador (derecha).

Otro aspecto importante a considerar es la disposición del excitador de vibración y del resonador. La excitación del resonador se debe realizar sobre la cara externa del panel estando este apoyado sobre el suelo, para lo que es necesario suspender el excitador de algún tipo de soporte. Resulta evidente que sería inviable excitar el resonador encontrándose también este suspendido de algún soporte, ya que al separarlo de la pared rígida desaparecería el colchón de aire encerrado en sus cavidades interiores. Esta capa de aire desarrolla un papel fundamental en el comportamiento del sistema como absorbente de baja frecuencia.

Además, se debe procurar que la estructura de soporte del excitador esté lo más aislada posible mecánicamente del sistema bajo ensayo –en este caso el formado por el resonador y el suelo- con el fin de evitar la influencia de los caminos indirectos de transmisión tanto de la vibración generada por el excitador, como de vibraciones ajenas que puedan dar origen a la introducción de ruido en el sistema de medida.

En el montaje que nos ocupa, el excitador se suspende, por medio de un cable, de un listón de madera apoyado en sus extremos sobre dos mesas, que a su vez descansan en el suelo sobre tacos de goma. Aunque la estructura que sostiene el excitador no es completamente independiente del sistema resonador-suelo, la amortiguación introducida por la suspensión del excitador y los tacos de goma sobre los que se apoya la estructura de soporte en el suelo supone una notable atenuación de los caminos indirectos de transmisión de la vibración.



Figura 5.18. Vistas del montaje del excitador sobre la placa del resonador.

En definitiva, para una excitación apropiada del resonador se suspenderá el excitador sobre la cara externa de la placa, a una altura tal que el imán esté lo suficientemente próximo a la chapa metálica para garantizar un nivel de aceleración vibratoria adecuado, pero lo suficientemente alejado para evitar que por efecto de la fuerza de atracción magnética lleguen a unirse. Este control de altura se lleva a cabo trenzando en mayor o menor medida los cables que sostienen el propio excitador.

5.4.3.2 Método de excitación y duración

El análisis modal del resonador se realiza por el método de la excitación forzada, empleando una señal de ruido blanco (excitación aleatoria). Recordemos que la excitación aleatoria presenta las ventajas de ofrecer la mejor aproximación lineal de sistemas, un factor de cresta y una relación señal-ruido aceptables y la posibilidad de realizar un zoom en el rango de frecuencias de interés; mientras que sus desventajas son la aparición de 'leakage' (dispersión espectral de la energía) y la necesidad de promediado espectral.

La duración de la excitación con ruido blanco se establece en un minuto, tiempo suficiente para minimizar el rizado que se produce en la respuesta en frecuencia debido al carácter aleatorio de la excitación. Además, se considera necesario promediar las respuestas de tres mediciones diferentes por cada punto de medida, de forma que se garantice la reproducibilidad de los resultados de las mediciones y del posterior análisis.

5.4.4 Posiciones de medida/excitación

El análisis modal experimental del resonador se realiza según el método SIMO ('Single-Input, Multiple-Output'), lo que implica que la excitación se mantiene fija en una determinada posición y la respuesta se registra en otros múltiples puntos de la placa del resonador.

Sobre la superficie de la placa del resonador se encuentra trazada una retícula cuadrada de 0.01 m de lado que, a modo de muestreo espacial, define los diferentes puntos de medida y/o excitación considerados para la medición y evaluación de la respuesta en frecuencia del sistema. Dicha retícula, con un total de 96 puntos, se muestra en la Figura 5.19.

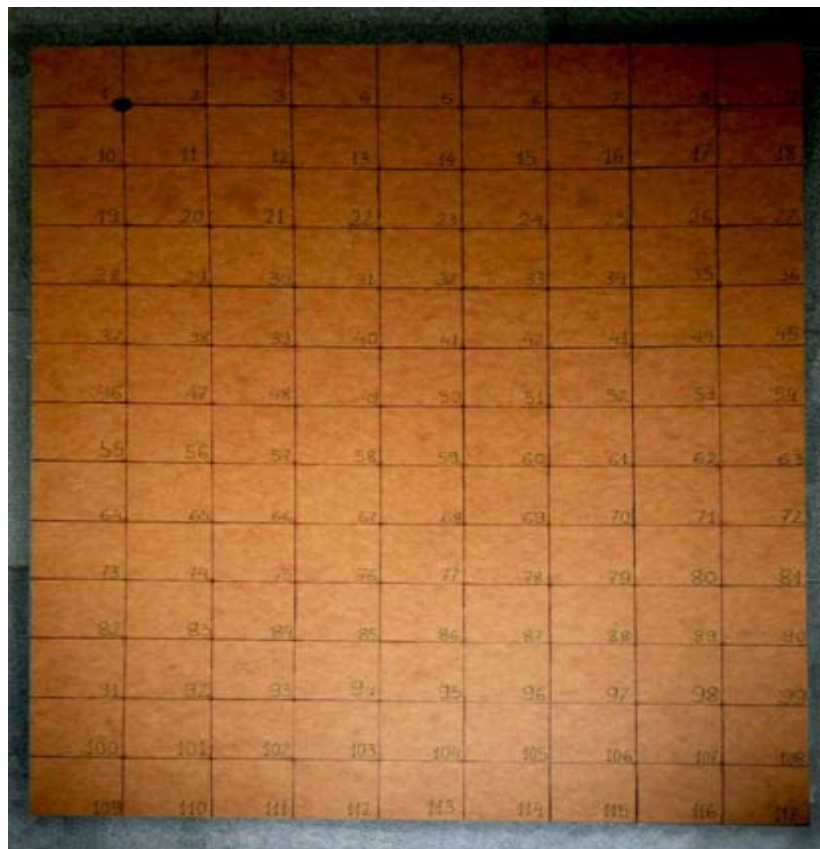


Figura 5.19. Vista de la retícula sobre el panel del resonador.

Con el fin de avivar el mayor número posible de modos propios de vibración del sistema, la posición de excitación se establece en el punto 1 de la retícula, cerca de la intersección de dos de los bordes de la placa y donde no se producirán líneas nodales (mínima vibración) dentro del rango de frecuencias de interés para el estudio. Este es

el punto al que, en efecto, se encuentra fijada la chapa metálica por la que transmite la vibración del excitador a la placa, tal y como se explicó en el apartado anterior.

El resto de puntos de la retícula, por tanto, definen las posiciones de medida en las que se evalúa la respuesta del resonador. También se registra la excitación aplicada en cada medición, imprescindible para el cálculo de la respuesta en frecuencia. En realidad no se registra la fuerza aplicada, sino la aceleración que genera, ya que no se dispone de transductores de fuerza.

El acelerómetro empleado para registrar la aceleración vibratoria de excitación se fija en la cara interior de la placa, dentro de la cavidad, debido a la imposibilidad de montarlo sobre la cara externa de la placa por la proximidad del excitador.

5.4.5 Medición de la respuesta vibratoria del resonador

Al disponer únicamente de cuatro acelerómetros para medir la aceleración vibratoria en los diversos puntos establecidos sobre la placa del resonador, las mediciones se llevan a cabo en diferentes sesiones. En cada una de estas sesiones, por tanto, se registra de forma simultánea la respuesta vibratoria forzada en tres puntos de medida diferentes, así como la excitación inducida en el punto de referencia (nodo 1 de la retícula trazada sobre la placa del resonador).

El procesamiento necesario para la obtención de la respuesta en frecuencia y el análisis modal del resonador se realizará a posteriori en MATLAB, por lo que durante el proceso de medición sólo es necesario almacenar las señales captadas por los acelerómetros mediante el sistema NetdB. No obstante, también haremos uso de sus funciones de analizador en tiempo real para monitorizar la respuesta del resonador en cada sesión de medida.

Una vez realizado el montaje del excitador y conectados los equipos de medida (a excepción de los acelerómetros, que se montarán justo antes de comenzar la medición), se procede a configurar el sistema de adquisición de datos por medio del software dBRTA.

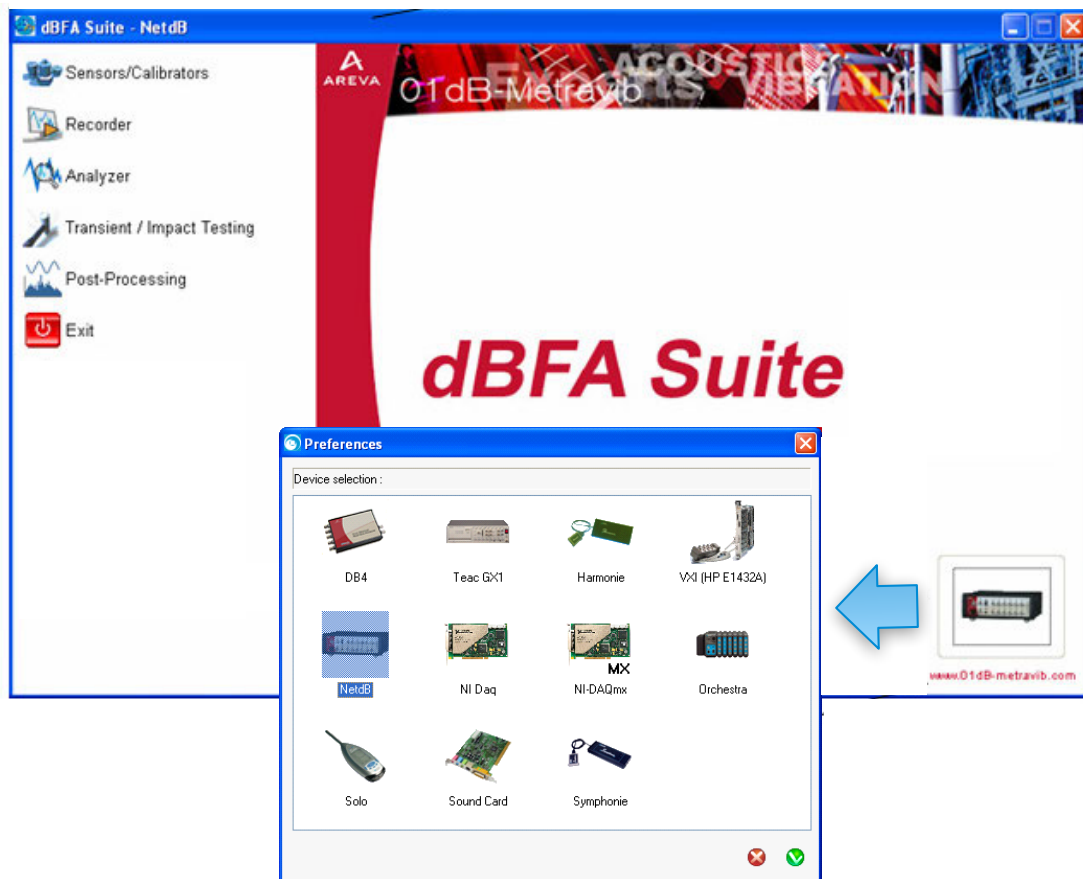


Figura 5.20. Ventana principal de la aplicación dBRTA y ventana de selección del front-end (sistema de adquisición).

En primer lugar, se debe seleccionar el dispositivo hardware empleado para la adquisición de datos, en este caso el sistema NetdB. Para ello nos dirigiremos a la opción 'Device Preferences' del menú contextual (click derecho) de la barra de título de la ventana principal de la aplicación. También es posible acceder a esta opción desde el icono situado en la esquina inferior derecha de la pantalla principal de la aplicación (véase Figura 5.20)

A continuación es necesario añadir los transductores y calibradores que serán empleados en las mediciones a la base de datos de la aplicación dBRTA, a la cual se accede mediante el módulo 'Sensor/Calibrators' de la aplicación (véase Figura 5.21). Para ello se introducen los modelos de transductor y calibrador en la lista de modelos correspondiente, junto con las especificaciones técnicas requeridas en cada caso. Las especificaciones para los transductores son: marca, tipo de transductor, rangos mínimo y máximo soportados, y unidad de magnitud; mientras que para el calibrador son: marca, tipo de calibrador, nivel RMS proporcionado, unidad de magnitud y frecuencia de la señal de referencia. Posteriormente se añaden a la lista de

transductores, uno a uno, los acelerómetros que van a ser empleados, indicando su nombre asociado, número de serie, modelo, unidad de medida y disponibilidad. Asimismo, se añade el calibrador a la lista correspondiente indicando su nombre asociado, modelo, tipo, y valor RMS, magnitud y frecuencia de la señal entregada por el mismo. Estas bases de datos se muestran, respectivamente, en la Tabla 5.III y la Tabla 5.IV.

Transducer DB

Transducer List

Name	Serial Number	Model	Unit	Available
Acc1:X	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc1:Y	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc1:Z	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc2:X	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc2:Y	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc2:Z	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc3:X	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc3:Y	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc3:Z	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc4:X	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc4:Y	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Acc4:Z	xxx	ACCXX	g	<input checked="" type="checkbox"/>
Dummy001	---	VOLT	V	<input checked="" type="checkbox"/>
Dummy002	---	VOLT	V	<input checked="" type="checkbox"/>
Dummy003	---	VOLT	V	<input checked="" type="checkbox"/>
Dummy004	---	VOLT	V	<input checked="" type="checkbox"/>
Mic01	xx3	MCE212	Pa	<input checked="" type="checkbox"/>
Mic02	xx2	MCE212	Pa	<input checked="" type="checkbox"/>

Transducer Model List

Name	Trademark	Type	Min Range	Max Range	Unit
MCE212	Unknown	Pressure	0	20000	Pa
ACCXX	Unknown	Acceleration	-500	500	g
T356A02	PCB Piezotronics, Inc.	Acceleration	-500	500	g
T086C02	PCB Piezotronics, Inc.	Force	-440	440	N
40PR	G.R.A.S. Sound & Vibration	Pressure	0	20000	Pa
VOLT	Unknown	Voltage	-100	100	V

Calibration Database

Calibration Date	Approval	Valid. (months)	Margin (months)	Sensitivity
2004/03/19 02:06:42	<input checked="" type="checkbox"/>	12	1	0.05286

Lista de transductores

Lista de modelos de transductores

Historial de calibración

Lista de calibradores

Lista de modelos de calibradores

Figura 5.21. Ventana principal del módulo 'Sensors/Calibrators'

Name	Trademark	Type	Min Range	Max Range	Unit
333B50	PCB Piezotronics, Inc.	Acceleration	-5	5	g

Name	Serial Number	Model	Unit	Available
acc.0	20992	333B50	g	Yes
acc.1	20993	333B50	g	Yes
acc.2	40704	333B50	g	Yes
acc.3	40705	333B50	g	Yes

Tabla 5.III. Base de datos de transductores: lista de modelos (arriba) y lista de transductores (abajo).

Name	Trademark	Type	RMS	Signal Unit	Frequency
B&K4294	Brueel & Kjaer	Acceleration	1	g	159.15

Name	Serial Number	Model	Unit	Available
CAL_4294		B&K4294	g	Yes

Tabla 5.IV. Base de datos de calibradores: lista de modelos (arriba) y lista de calibradores (abajo).

Una vez actualizada la base de datos, se debe proceder a la configuración del módulo 'Analyzer', que se utilizará para realizar el ensayo. Este módulo permite procesar y analizar en el dominio de la frecuencia los datos adquiridos en tiempo real, así como almacenar los resultados de dicho análisis y los datos de las señales temporales. Al acceder por primera vez al módulo se creará un archivo de configuración con los ajustes pertinentes, archivo que cargaremos en sucesivas sesiones evitando así tener que repetir este proceso. Para crear o cargar el archivo de configuración nos dirigiremos al submenú emergente 'Configuration/New' o 'Configuration/Open', respectivamente, tras hacer click en el botón 'Analyzer' (véase Figura 5.22).

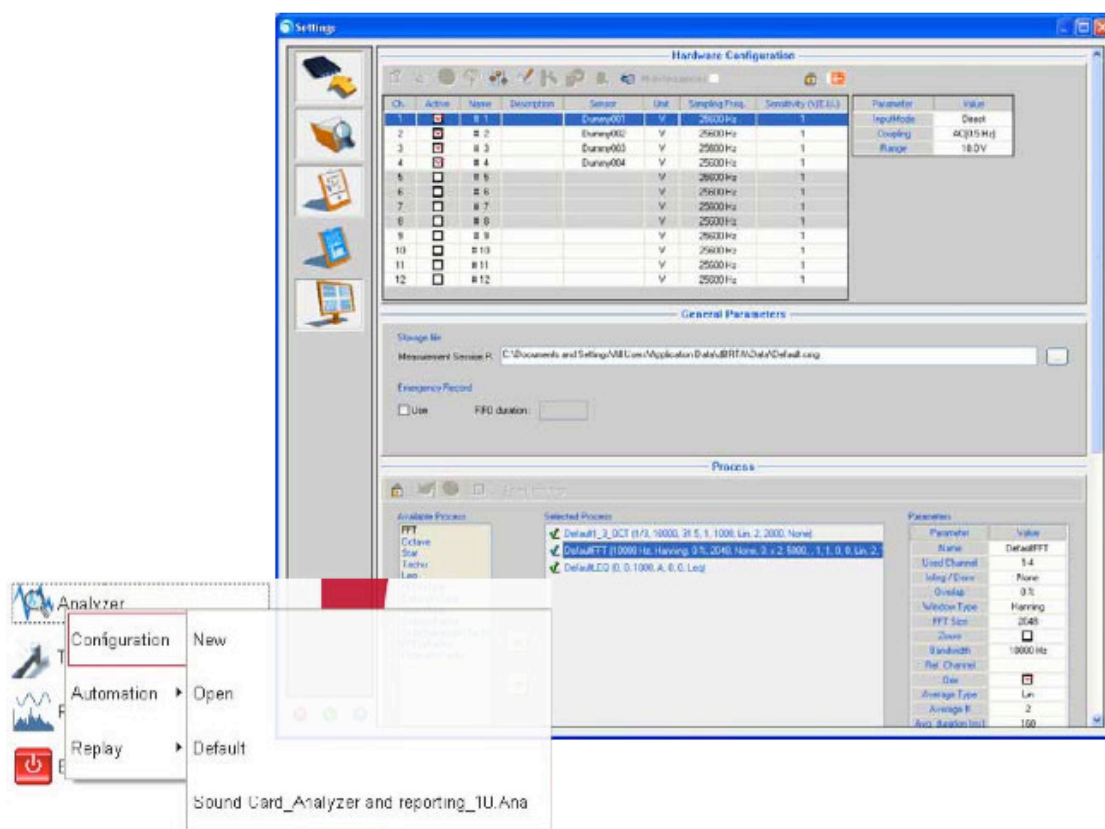


Figura 5.22. Acceso y panel de configuración del módulo 'Analyzer'.

Las opciones de configuración de este módulo –accesibles también desde la ventana principal del módulo mediante el botón 'Settings' de la barra de herramientas– se organizan en diversas secciones, cuyos ajustes se detallan a continuación:

- 'Hardware Configuration'

Permite la activación de los canales de entrada, así como el ajuste de los parámetros comunes de los mismos (nombre y descripción del canal, magnitud, frecuencia de muestreo, modelo y sensibilidad del transductor asociado). Estos parámetros quedan registrados en los archivos digitales de datos, y su configuración se realiza de forma que la cadena de medida esté perfectamente caracterizada en todo momento, tal y como se detalla a continuación.

Cada canal de entrada activo lleva asociado de forma unívoca uno de los acelerómetros empleados y catalogados en la base de datos de transductores de la aplicación. Cada acelerómetro, a su vez, está identificado por su número de serie y un nombre asociado. Por otro lado, el campo "nombre" de cada canal se emplea para indicar si se

trata de la medición de la excitación o de una respuesta; mientras que en el campo “descripción” se indica el punto de medida correspondiente.

Este panel de configuración también permite acceder a diversas operaciones adicionales relativas a la configuración de la etapa de entrada del sistema de adquisición, tales como el ajuste del rango dinámico ('Gain Setting' o 'Auto Range') o el cálculo y ajuste de la sensibilidad de cada uno de los canales de la cadena de medida ('Channel Control').

La configuración de hardware empleada se muestra en la Tabla 5.V. El único parámetro a modificar en las diferentes series de medida es el campo “descripción” de los diferentes canales de entrada. Los datos de sensibilidad mostrados no se corresponden con los valores facilitados por el fabricante (introducidos inicialmente), sino a aquellos valores ajustados mediante la función 'Channel Control', como detallaremos más adelante al referirnos a la verificación de la cadena de medida.

Ch.	Active	Name	Description	Sensor	Unit	Sampling freq.	Sensitivity (V/E.U.)
1	Yes	#1	Excitation	acc.0	g	51200	1.03343
2	Yes	#2	Response 1	acc.1	g	51200	1.04038
3	Yes	#3	Response 2	acc.2	g	51200	1.02439
4	Yes	#4	Response 3	acc.3	g	51200	0.993532

Tabla 5.V. Configuración de hardware empleada en el proceso de medición.

- Output Parameters.

Esta sección de configuración permite la activación de los canales de salida, la selección del tipo de señal a generar y el ajuste de sus características. Como ya se ha indicado, se empleará ruido blanco como señal de excitación, mostrándose el ajuste de los parámetros correspondientes a la misma en la Tabla 5.VI.

Generation Type: White noise

Amplitude (Vrms)	Low freq. Filter (Hz)	High freq. Filter (Hz)	Fade in (s)	Fade out (s)	DC level (V)
0.6	0	0	0	0	0

Tabla 5.VI. Configuración de la etapa de salida del sistema NetdB.

- General Parameters

En esta sección podemos seleccionar la ruta y el nombre del fichero con los datos de cada sesión completa de medida. Para una mayor comodidad y un mayor control de dichas sesiones, se activa la opción para nombrar automáticamente los ficheros de datos. La nomenclatura empleada es la siguiente: “excitación_fecha_hora”.

- Processing Parameters

En esta sección se pueden seleccionar los diferentes tipos de procesado en tiempo real a aplicar a los distintos canales activos de entrada, así como ajustar los diferentes parámetros asociados a cada proceso.

Este panel también ofrece la posibilidad de grabar las señales temporales (el módulo ‘Analyzer’, por defecto, sólo almacena los datos procesados). Se activará esta opción, ya que en este caso sólo nos interesa el registro de las señales temporales; el posterior procesado de las mismas, como hemos comentado, se realizará de forma externa en MATLAB.

Con el fin de visualizar la respuesta dinámica del resonador en las diferentes posiciones de medida, añadiremos un procesado FFT para el análisis de las señales captadas por los acelerómetros. La configuración empleada para el análisis FFT se muestra en la Tabla 5.VII.

Parameters	Value
Name	FFT
Used Channels	"1-4"
Overlap	75%
Window Type	Hanning
FFT Size	8192
Zoom	Desactivado
Bandwidth	20000 Hz
Ref. Channel	1
Gxx	Activado
Gxy	Activado
H1	Desactivado
1/H1	Desactivado
H2	Activado
1/H2	Desactivado
Coh	Activado
Average Type	Lin
Average #	
Avg. Duration (ms)	60000

Tabla 5.VII. Configuración del análisis FFT

- Display Parameters

Por último, esta sección permite seleccionar aquella información que se desean visualizar en tiempo real por pantalla durante el desarrollo de la medición. Los datos disponibles son aquellos derivados de los diferentes tipos de procesado definidos en la sección 'Processing Parameters', en este caso del análisis FFT, así como las propias señales temporales.

Con el fin de disponer de toda información relevante a la hora de realizar una valoración preliminar de la respuesta del resonador en los puntos evaluados, y de todo aquello que pudiera acontecer durante cada medición, optaremos por presentar en la pantalla de visualización tanto las señales temporales como los siguientes resultados del análisis FFT: autoespectro (PSD), espectro cruzado, función de respuesta en frecuencia y coherencia.

De forma paralela a la caracterización de la cadena de medida en los ficheros de datos y a la identificación la sesión de medida correspondiente en el nombre de los mismos, se emplea una hoja de registro manual en la que se recogen los datos más relevantes de cada sesión: tipo de medida (excitación o respuesta), señal de excitación, ancho de banda, punto de medida y transductor empleado (nombre asignado en la base de datos de la aplicación dBRTA), así como el modelo y número de serie correspondientes y el canal de entrada asociado al mismo. De esta forma, se garantiza la completa caracterización de la cadena de medida en cada medición, así como un mayor control sobre los registros de datos digitales.

Antes de proceder con cada sesión de medida, se procede a la verificación de cada uno de los canales de entrada. Haciendo uso de la función 'Channel Control', dentro del panel de configuración 'Hardware Control', se comprueba la lectura del nivel de aceleración vibratoria con el correspondiente acelerómetro fijado al calibrador (véase la Figura 5.23). Se considera satisfactoria la verificación si dicho nivel se encuentra en un margen de ± 3 dB respecto del nivel nominal del calibrador. En caso contrario, se debe desestimar el desarrollo de la medición en tanto el elemento (o elementos) causante de dicha anomalía sea identificado y reparado, o en su caso, sustituido por otro equivalente en perfecto estado de funcionamiento. No obstante, en ningún momento se ha dado esta circunstancia durante el desarrollo de las diferentes sesiones de medida.

Puesto que la instrumentación de medida de vibraciones no se encuentra sometida a control metrológico y, por tanto, no requiere de su calibración por parte de una entidad acreditada, es posible realizar el ajuste de la sensibilidad de los acelerómetros antes de comenzar la primera sesión de medida en caso de que la lectura del nivel de vibración generado por el calibrador presente una desviación considerable (>1 dB) respecto a su valor nominal. Este ajuste se realiza desde la propia ventana de la función 'Channel Control' y, una vez hecho, debe salvarse la configuración del módulo 'Analyzer' para conservar los cambios respecto a la sensibilidad facilitada por el fabricante.

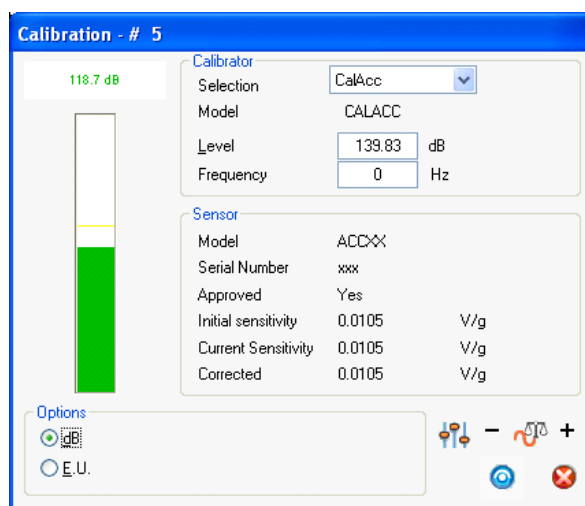


Figura 5.23. Ventana de calibración para la función 'Channel Control'.

Una vez finalizado de forma satisfactoria el proceso de verificación, se fijan los acelerómetros a la placa del resonador mediante cera de abeja. Este método de montaje es muy cómodo y fiable, y la frecuencia de resonancia apenas se ve modificada por la amortiguación extra que introduce dicho material fijador. De todas formas, dicha frecuencia se encuentra muy por encima del margen de frecuencias de interés.

Llegados a este punto, con el sistema de adquisición configurado, la cadena de medida verificada y fijados los acelerómetros, se procede a la medición de la respuesta del resonador en los puntos correspondientes. En primer lugar, activaremos la adquisición de datos en la pantalla principal del módulo 'Analyzer' –botón 'Activate'. En este momento, el sistema comienza a recoger y mostrar en pantalla las señales de entrada de los canales activos, pero no almacena dato alguno. A continuación, activaremos el generador de salida y procederemos al ajuste del rango dinámico de entrada de dichos canales haciendo uso de la función 'Auto Range', disponible en la barra de herramientas (véase Figura 5.24). Se empleará una duración mínima para el auto-rango de 5 segundos.

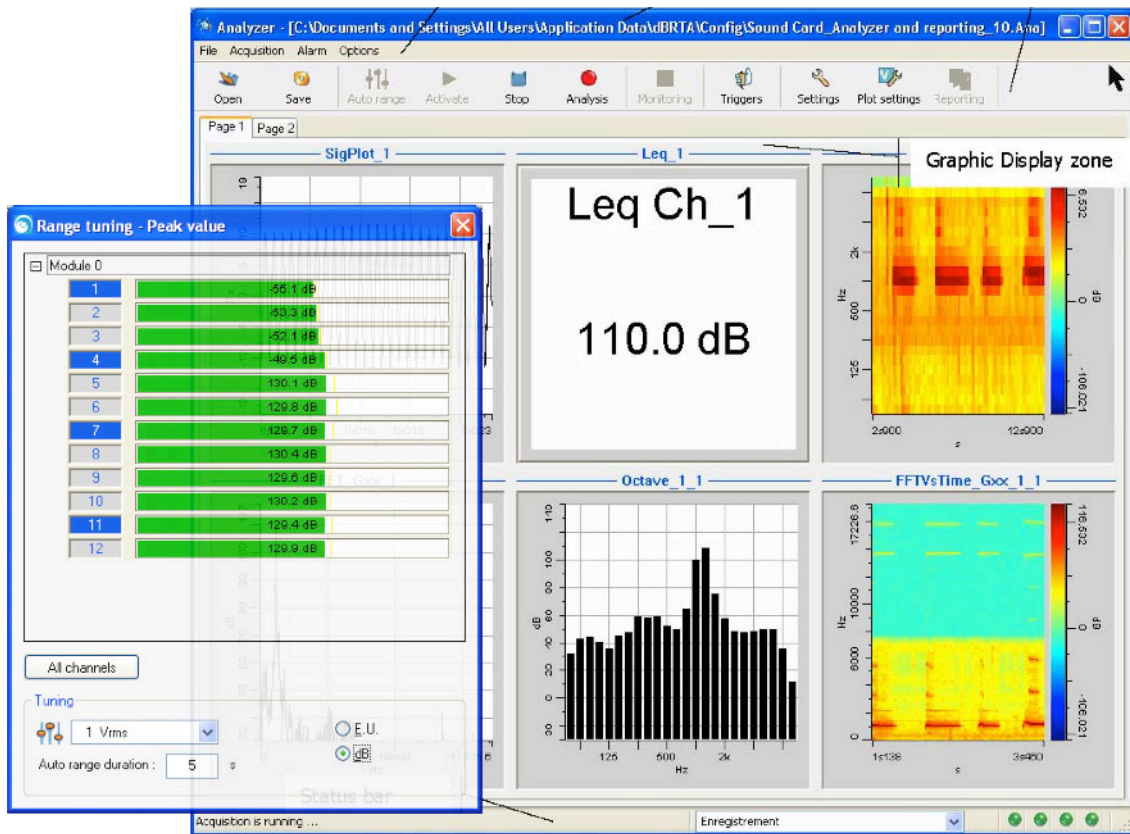


Figura 5.24. Ventana principal del módulo 'Analyzer' y ventana de la función 'Auto Range'.

Una vez completado el auto-rango, podemos comenzar con el registro y análisis de los datos de entrada –botón 'Analyze'. Antes de comenzar, conviene asegurarse de que el ventilador de la interfaz NetdB se encuentra apagado durante la medición para evitar introducir de forma innecesaria ruido de fondo en la medición. Ya con la grabación y análisis de datos en marcha, la aplicación muestra por pantalla en tiempo real aquellos datos seleccionados en el panel de configuración 'Display Parameters'. Una vez interrumpida la excitación del generador de señal (al menos un minuto de duración), se detiene tanto la grabación como la adquisición –botón 'Stop'- y los datos de la medición son inmediatamente almacenados en el fichero correspondiente, de acuerdo a lo establecido en el panel de configuración 'General Parameters'.

Finalmente, dado que los archivos binarios generados por la aplicación dBRTA no presentan una compatibilidad directa para ser importados en MATLAB, exportaremos los resultados de la medición a un archivo de texto para su posterior procesado. Para ello, ejecutaremos el módulo 'Post-Processing' y, una vez cargado el fichero de la sesión correspondiente, seleccionaremos todas las señales temporales y

las exportaremos como archivo de texto (formato ‘.txt’) desde el menú ‘File/Export’ (véase Figura 5.25). La nomenclatura empleada será la misma que en el archivo original: “excitación_fecha_hora.txt”.

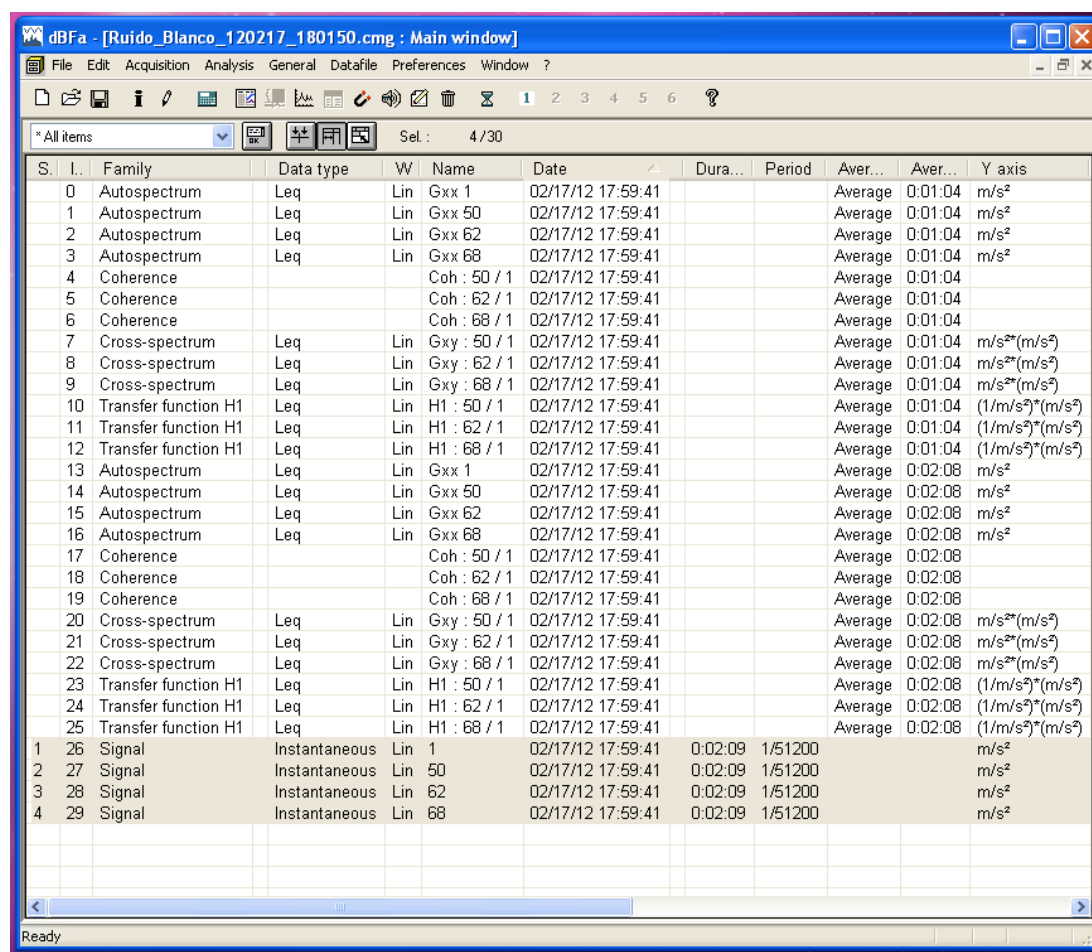


Figura 5.25. Pantalla principal del módulo ‘Post-Processing’.

Como ya se ha indicado con anterioridad, se realizarán tres mediciones para cada punto de medida (o conjunto de puntos, en este caso) para su posterior promediado, dado el carácter aleatorio de la señal de ruido blanco empleada como excitación. Además, antes o después de cada sesión de medida, se procederá a la evaluación del ruido de fondo existente, siguiendo este mismo proceso y verificando que su nivel en frecuencia se encuentra suficientemente por debajo del nivel registrado para la respuesta del excitador (recomendable una diferencia en torno a 10 dB), y repitiéndose la medida si fuera necesario. El campo “excitación” en el nombre de los archivos de datos generados se especificará como “BackgroundNoise”.

5.5 Procesado de la respuesta temporal

Tras el registro de la respuesta temporal forzada del resonador en los diferentes puntos de medida establecidos sobre la placa del mismo, es necesario procesar los datos almacenados para identificar los modos propios de vibración del resonador. Dicho procesado digital se realiza en MATLAB y consiste en el análisis espectral (FFT) de las señales de aceleración vibratoria y el posterior análisis modal de las funciones de respuesta en frecuencia obtenidas. Para este fin se ha desarrollado una aplicación que permite el procesado en bloque de grandes cantidades de ficheros de datos, correspondientes a las diferentes mediciones de la respuesta dinámica del sistema mecánico-acústico bajo ensayo.



Figura 5.26. Ventana principal de la herramienta de análisis FFT-modal.

Esta herramienta, orientada al análisis modal experimental basado en métodos de excitación aleatorios, está compuesta por tres módulos fundamentales: módulo de entrada, módulo FFT y módulo de análisis modal. Además, incorpora un cuarto módulo para la visualización de los resultados del análisis FFT-modal. El funcionamiento de estos módulos, accesibles desde la ventana principal de la aplicación (Figura 5.26), se describe en las secciones sucesivas.

5.5.1 Módulo de entrada

Recordemos que cada uno de los ficheros de datos generado corresponde a una sesión de medida de la respuesta vibratoria del resonador en tres puntos diferentes del mismo, además de la vibración inducida en el punto de excitación. En los mismos se recoge, además de los valores de cada muestra temporal de la señal vibratoria, una cabecera con diversa información relativa a las características de la cadena de medida y la señal registrada. y que permite identificar la procedencia de los datos de medida registrados.

El módulo de entrada permite seleccionar los ficheros de datos que se desea procesar (botón 'Open'). Una vez seleccionados, se importan las señales de aceleración vibratoria contenidas en los mismos, así como aquella información de la cabecera que resulta de interés para la identificación y caracterización de cada señal (todas han de haberse muestreado a la misma frecuencia, y corresponderse a una misma unidad de magnitud). Estos datos se cargan en memoria en un array de estructuras ('struct array'), cada una de las cuales corresponde a un punto de medida concreto y está compuesta por los siguientes campos:

- *Data*. En este campo se almacenan y agrupan los datos de las señales temporales (vectores columna) registradas en un punto de medida determinado en una misma matriz de datos. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $n \times m$, donde n es el número de muestras de la señal y m el número de mediciones realizadas.
- *File*. Campo en el que se recogen los archivos originales ("excitación_fecha_hora.txt") de procedencia de los datos importados en el campo *Data* de la estructura. El nombre de los archivos originales se emplea para identificar la señal de excitación (vector columna de la matriz *Data* del punto establecido como referencia en el Módulo FFT) correspondiente a cada respuesta almacenada en *Data*. Este campo es de tipo 'cell array', con dimensiones $1 \times m$ (tantas columnas como mediciones realizadas en el punto pertinente).
- *Node*. Este campo indica el punto de medida al que corresponden todos los datos de la estructura. Es de tipo 'char'.
- *Info*. Contiene información relevante para la caracterización del tipo de señal registrada: unidad de magnitud, valor de referencia y escala

(Lin/dB). Todos estos datos han de ser idénticos para todas las mediciones realizadas. Este campo es de tipo 'cell array', con dimensiones 3x1.

El módulo de entrada permite especificar la ruta del fichero de salida donde se almacenará, si se desea, el array de estructuras generado en un fichero '.mat'. También es posible abrir directamente un archivo .mat generado con anterioridad desde la propia ventana de selección de ficheros de entrada.

5.5.2 Módulo FFT

El cometido del módulo FFT es llevar a cabo la estimación espectral de las señales temporales discretas importadas en el módulo de entrada y, en última instancia, obtener las funciones de respuesta en frecuencia (FRF) del sistema a partir de las cuales se llevará a cabo su caracterización modal. Esta estimación espectral se basa en la transformada discreta de Fourier o DFT (del inglés Discret Fourier Transform), y para su cálculo eficiente se utiliza el algoritmo de la transformada rápida de Fourier o FFT (Fast Fourier Transform). Asimismo, el módulo calcula el espectro (y el resto de funciones espectrales, entre ellas la FRF) promedio de las diferentes mediciones realizadas en cada uno de los puntos en los que se ha registrado la respuesta del sistema.

El diseño de este módulo se basa en la filosofía y las técnicas de procesado empleadas en los analizadores FFT comerciales de doble canal –como el analizador Pulse de B&K o el sistema NetdB de 01dB-Metravib utilizado anteriormente-, adaptadas a las necesidades particulares del análisis que nos ocupa, así como al manejo y tratamiento de grandes cantidades de datos de forma automática y simultánea. A diferencia de estos analizadores comerciales, y debido a limitaciones evidentes, el procesado se realiza de forma 'offline', y no en tiempo real.

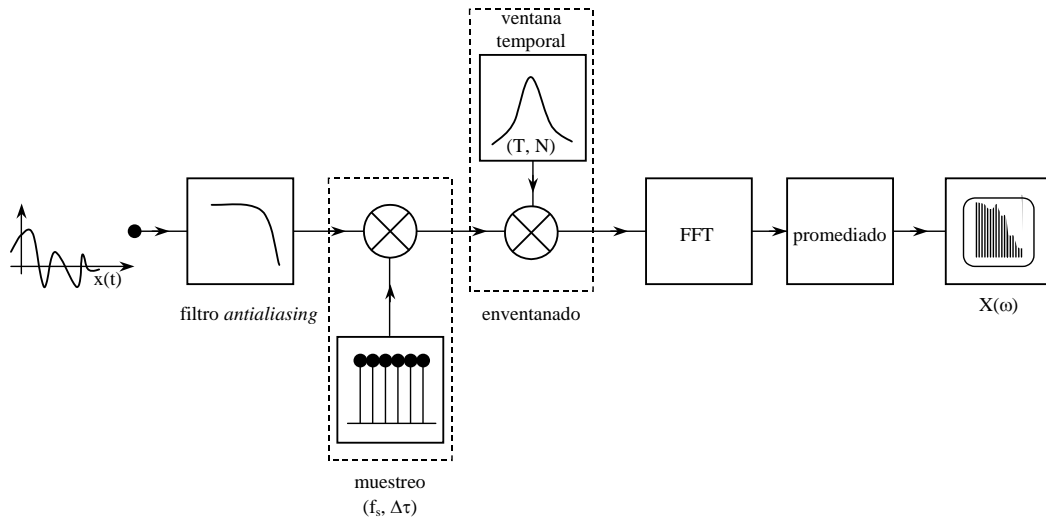


Figura 5.27. Diagrama de bloques de un analizador FFT monocanal.

En la Figura 5.27 se muestra el diagrama de bloques de un analizador FFT monocanal, en el cual se pueden diferenciar dos secciones: la etapa de muestreo o adquisición de datos, y la etapa de análisis FFT propiamente dicho. La etapa de muestreo es ajena a la aplicación pues requiere de una interfaz de conversión A/D y, por tanto, dicho proceso debe realizarse previamente por otros medios. No obstante, conviene recordar algunos conceptos fundamentales relativos a la etapa de muestreo dada su relevancia en el posterior análisis FFT.

La frecuencia de muestreo determina el máximo ancho de banda posible de una señal temporal para su reconstrucción exacta a partir de las muestras tomadas de la misma (teorema de Nyquist). Es por esto que, antes de su muestreo, es necesario aplicar un filtro paso bajo a las señales temporales, evitando así la aparición de 'aliasing'. Dicho ancho de banda se define por su máxima frecuencia $f_{\max} = f_s/2$, denominada frecuencia de Nyquist. Este también será, por tanto, el máximo ancho de banda posible para el análisis FFT de la señal.

No obstante, con el fin de facilitar el diseño de los filtros antialiasing y disponer de un margen de frecuencia de seguridad, se suele establecer normalmente un ancho de banda inferior a la frecuencia de Nyquist, $f_{\max} < f_s/2$. Así, para el diseño del analizador FFT que nos ocupa, se establece una relación $f_s/f_{\max} = 2.56$.

5.5.2.1 Fundamentos del análisis DFT-FFT

La transformada discreta de Fourier (DFT) convierte una secuencia finita periódica de N muestras temporalmente equidistantes (Δt) en una serie de coeficientes

ordenados en frecuencia, asociados a sinusoides complejas (información de amplitud y fase) que representan las componentes de frecuencia de la función discreta temporal. En otras palabras, la DFT convierte la información de la secuencia periódica del dominio temporal al dominio de la frecuencia. Las frecuencias de las sinusoides de salida corresponden a múltiplos enteros de la frecuencia fundamental (Δf), cuyo periodo correspondiente es la longitud de la secuencia muestreada ($T = N \cdot \Delta t$). La DFT se define como:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} = X(\omega_k = \frac{2\pi k}{N}) \quad (5.12)$$

Esta transformada es equivalente al muestreo en frecuencia (efecto valla) de la transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) $X(\omega)$ entre 0 y 2π ; la cual, recordemos, es continua en frecuencia, periódica con periodo normalizado $\omega=2\pi$ y presenta simetría conjugada. Así, cuanto menor sea Δf (o mayor sea N), menor será la pérdida de información.

En la práctica, el cálculo de la DFT se realiza sobre bloques de N elementos o muestras de la señal a analizar, correspondientes a los diferentes intervalos finitos de duración T en los que se divide la misma, asumiendo que cada intervalo corresponde al periodo de una señal periódica de extensión infinita. Puesto que normalmente no se cumple este supuesto, es necesario el uso de ventanas de ponderación temporal para evitar discontinuidades en los extremos de la secuencia analizada que provoquen la aparición de frecuencias espurias en el espectro (efecto borde). Así, $T = N/f_s$ representa la duración de la ventana empleada, siendo N el tamaño o número de puntos de la misma y f_s la frecuencia de muestreo; y determina la resolución en frecuencia Δf del analizador FFT:

$$\Delta f = \frac{1}{T} = \frac{f_s}{N} \quad (5.13)$$

Podemos entender la DFT como un banco de filtros en paralelo centrados en las diferentes líneas de frecuencia $k\Delta f$ en las que se discretiza el espectro de la señal, de forma que cada línea espectral representa la salida del filtro correspondiente. La respuesta en frecuencia de estos filtros está determinada por el tipo de ventana elegida, concretamente por su TF, y tiene una gran influencia en la estimación espectral.

Ventana	Anchura -3 dB lóbulo ppal. (líneas FFT)	Anchura -6 dB lóbulo ppal. (líneas FFT)	Nivel máximo lóbulo sec. (dB)	Pendiente atenuación lóbulos secundarios (dB/década)
Rectangular	0.89	1.21	-13	20
Hanning (Hann)	1.44	2	-31	60
Hamming	1.3	1.82	-43	20
Blackman-Harris	1.62	2.27	-71	20
Exact Blackman	1.61	2.25	-68	20
Blackman	1.64	2.3	-58	60
Flat Top	3.72	4.58	-93	20

Tabla 5.VIII. Características de las ventanas más habituales.

Cada ventana tiene sus propias características, lo que hace que tengan diferentes aplicaciones. Las características de una ventana se definen, fundamentalmente, por la anchura de su lóbulo principal, así como por el nivel máximo y la pendiente de atenuación de sus lóbulos laterales. La anchura del lóbulo principal (no sólo depende del tipo de ventana, también del tamaño de la misma) determina la capacidad de la ventana para discriminar frecuencias próximas, cuanto mayor sea la anchura, menor resolución en frecuencia. El nivel de los lóbulos secundarios determina la capacidad para discriminar niveles, cuanto menor sea, menor dispersión del espectro (leakage). Así, resulta de gran importancia la elección del tipo de ventana apropiado (Rectangular, Hanning, Kaiser-Bessel, Blackman-Harris...) en función del tipo de señal temporal a analizar y su aplicación.

Aplicación	Ventana
Análisis de señales periódicas	Kaiser-Bessel Blackman-Harris
Calibración	Flat Top
Discriminación de tonos próximos de diferente nivel	Kaiser-Bessel
Análisis de sistemas con excitación aleatoria	Hanning
Transitorios de duración menor que T	Rectangular Transitoria
Transitorios de duración mayor que T	Hanning
Análisis de la respuesta de estructuras poco amortiguadas (transitorias de duración mayor que T)	Exponencial
Análisis de señales de contenido desconocido	Hanning

Tabla 5.IX. Elección inicial de la ventana basada en el contenido de la señal

Ventana	Factor de escala	Nivel ruido equivalente	Error de amplitud máximo (dB)
Rectangular	1	1	3.92
Hanning	0.5	1.5	1.42
Hamming	0.54	1.36	1.75
Blackman-Harris	0.42	1.71	1.13
Flat Top	0.22	3.77	< 0.01

Tabla 5.X. Factores de corrección y máximos errores de amplitud para ventanas

Por último, se realiza el promediado espectral de las estimaciones instantáneas de un determinado número de bloques temporales de la señal. Este promediado espectral puede ser lineal, exponencial o de pico, en función de las características de la excitación empleada y las necesidades particulares de cada análisis. La frecuencia con la que se calculan los espectros instantáneos de la señal viene determinada, además de por la duración de la propia ventana, por el solapamiento deseado entre ventanas –o bloques temporales- consecutivas. Así, el periodo temporal sobre el que tiene lugar el promediado espectral viene determinado por:

$$T_{avg} = T + \Delta t_{avg}(n_w - 1) = T + Ts(n_w - 1) \quad (5.14)$$

donde n_w es el número de ventanas analizadas y Δt_{avg} es el intervalo temporal entre estimaciones instantáneas, dado por el tamaño de la ventana empleada T y el solapamiento s entre las mismas, en tanto por uno. T_{avg} debe ser lo suficientemente grande para garantizar la representatividad de los resultados obtenidos; el tiempo de promediado necesario depende del tipo de excitación.

El análisis FFT de doble canal, más allá del cálculo del espectro (o autoespectro) de las señales analizadas, permite obtener diversas funciones derivadas de la DFT relativas a la relación entrada-salida, o la relación entre dos salidas distintas, de un determinado sistema, asumiendo que este es lineal. Aunque son varias las nuevas funciones disponibles en el análisis FFT de doble canal respecto al análisis monocanal, el único procesado adicional que se realiza es el cálculo del espectro cruzado entre las dos señales analizadas. Todas las demás funciones, como la función de respuesta en frecuencia o la coherencia, son funciones derivadas de los tres espectros; es decir, del autoespectro de la señal en el canal A, el autoespectro de la señal en el canal B y el Espectro Cruzado entre las señales de dichos canales.

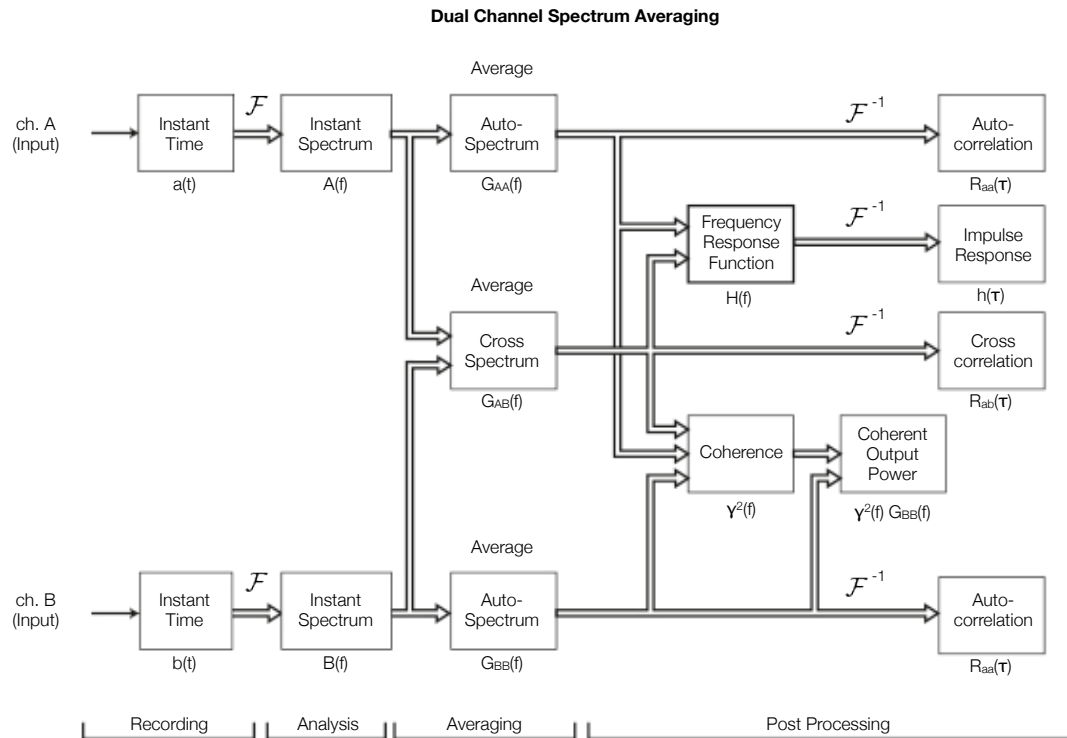


Figura 5.28. Diagrama de bloques simplificado de un analizador FFT de doble canal.

La Figura 5.28 muestra el diagrama de bloques de un analizador FFT de doble canal, donde se puede observar la relación entre las diferentes funciones derivadas de la DFT. El proceso de cálculo de las funciones disponibles en el módulo FFT, así como su definición y sus implicaciones, se detallan en las sucesivas secciones.

5.5.2.2 Cálculo del autoespectro

La DFT de cada bloque de análisis de la señal discreta $x[n]$ proporciona su espectro bilateral instantáneo $X[k]$, definido en la ecuación (5.12), el cual presenta simetría conjugada respecto a $k=N/2$, correspondiente a la frecuencia normalizada $\omega=\pi$ (o $f_s/2$). Esto se traduce en simetría par para la información de amplitud, y simetría impar para la información de fase. Por tanto, la información del espectro entre $k=(N/2)+1$ y $k=N-1$ es redundante. Esto hace que, en general, sea más conveniente trabajar con el espectro unilateral.

Los valores del espectro bilateral de amplitud $|X[k]|$ representan la mitad de las amplitudes de pico A_k (en las unidades correspondientes) de cada componente de frecuencia de la señal; salvo para la componente continua DC ($k=0$), cuyo valor es igual a la amplitud de pico. Es decir, la energía se reparte entre las dos mitades del espectro. Por tanto, para obtener el espectro unilateral, el cual contiene información

tanto de amplitud como de fase, se descarta la segunda mitad del espectro bilateral complejo (parte real e imaginaria), y se multiplica la amplitud de cada componente, excepto la componente DC , por dos. Teniendo en cuenta que el análisis FFT se extiende hasta $f_{max}=N_f\Delta f$, siendo N_f el número de puntos o líneas de frecuencia (y por consiguiente $N_f=N/2.56$):

$$|X'[k]| = \begin{cases} 2 \cdot |X[k]| & 0 < k \leq N_f \\ |X[k]| & k = 0 \\ 0 & k > N_f \end{cases} \quad (5.15)$$

$$\angle X'[k] = \begin{cases} \angle X[k] & 0 \leq k \leq N_f \\ 0 & k > N_f \end{cases} \quad (5.16)$$

Como ya hemos comentado, el cálculo de la DFT se realiza mediante el algoritmo FFT. La FFT devuelve un espectro bilateral en forma compleja, cuya amplitud (módulo) es proporcional al número de puntos de la señal temporal, es decir, al número de puntos N de la ventana. Así:

$$|X[k]| = \begin{cases} \frac{2 \cdot |FFT(x)|}{N}, & k = 1 \dots N_f \\ \frac{|FFT(x)|}{N}, & k = 0 \end{cases} \quad (5.17)$$

$$\angle X[k] = \angle FFT(x), \quad k = 0 \dots N_f \quad (5.18)$$

Para obtener el espectro de amplitud en voltios (o la unidad de magnitud correspondiente) RMS, se dividen todos los componentes de frecuencia, salvo el componente DC , por la raíz cuadrada de dos una vez convertido el espectro a la forma unilateral. Es decir:

$$|X'_{RMS}[k]| = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \cdot |FFT(x)|}{N}, & k = 1 \dots N_f \\ \frac{|FFT(x)|}{N}, & k = 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

El espectro de amplitud está estrechamente relacionado con el espectro de potencia ($\text{voltios}_{\text{RMS}}^2$ o unidad^2), el cual es real (sólo contiene información de amplitud) y proporciona la distribución de potencia en la señal como función de la frecuencia. El término potencia se emplea aquí para referirse al valor medio de una magnitud al cuadrado. El espectro de potencia unilateral se puede calcular elevando al cuadrado el espectro de amplitud RMS unilateral, y viceversa. En la práctica, el espectro de potencia se calcula a partir de la FFT de la siguiente manera:

$$S_{xx}[k] = \frac{FFT^*(x) \cdot FFT(x)}{N^2} \quad (5.20)$$

Y, por tanto, el espectro de potencia unilateral :

$$G_{xx}[k] = \begin{cases} \frac{2 \cdot FFT^*(x) \cdot FFT(x)}{N^2}, & k = 1 \dots N_f \\ \frac{FFT^*(x) \cdot FFT(x)}{N^2}, & k = 0 \end{cases} \quad (5.21)$$

Como veremos más adelante, el espectro de potencia es equivalente al espectro cruzado entre dos señales $a[n]$ y $b[n]$ cuando ambas señales son la misma, motivo por el cual el espectro de potencia se denomina habitualmente autoespectro.

El uso del espectro de amplitud y el autoespectro de potencia es adecuado para el análisis espectral de señales periódicas, con componentes discretas de frecuencia. Sin embargo, para el análisis de otro tipo de señales, como señales aleatorias de banda ancha o señales transitorias, es recomendable el uso de las funciones de densidad espectral. Estas funciones normalizan el espectro de potencia, energía, o incluso amplitud, al espectro que sería medido por un filtro cuadrado con un ancho de banda de 1 Hz. De esta forma, se independiza la lectura de los niveles de ruido de fondo, ya que estos dependen del Δf del espectro, que por su parte está controlado por la frecuencia de muestreo f_s y el número de puntos N . Así, para una f_s determinada, doblar el número de puntos en tiempo supone una reducción del nivel de ruido en cada línea de frecuencia de 3 dB. Las componentes de frecuencia discretas, por otro lado, tienen teóricamente un ancho de banda de 0 Hz y, por tanto, no se escalan con el número de puntos o la resolución de la FFT.

La densidad espectral de potencia se define como:

$$PSD = \frac{S'_{XX}[k]}{\Delta f \cdot BW_{NP}} \quad (5.22)$$

en V_{RMS}^2/Hz o $Unidad^2/Hz$, mientras que la densidad espectral de amplitud se calcula como:

$$ASD = \frac{X'_{RMS}[k]}{\sqrt{\Delta f \cdot BW_{NP}}} = \sqrt{PSD} \quad (5.23)$$

en V_{RMS}/\sqrt{Hz} o $Unidad/\sqrt{Hz}$. En ambos casos BW_{NP} es el ancho de banda de potencia de ruido de la ventana empleada (véase Tabla 5.X).

Las densidades espectrales de potencia y amplitud, PSD y ASD respectivamente, son funciones apropiadas para el análisis de señales aleatorias o ruidos de banda ancha.

Por otro lado, para el análisis de señales transitorias, es más adecuado el uso de la densidad espectral de energía, que se calcula como:

$$ESD = \frac{N \cdot S'_{XX}[k]}{\Delta f \cdot BW_{NP}} \quad (5.24)$$

en $V_{RMS}^2 \cdot s/Hz$ o $Unidad \cdot s/Hz$. Y es que dada la corta duración de este tipo de señales, se emplean ventanas lo suficientemente grandes como para contenerlas completamente en su interior.

A efectos prácticos, los analizadores FFT, y este módulo en particular, calculan el autoespectro de potencia de la señal y posteriormente, en caso que sea necesario, realiza un escalado para representar el espectro unilateral en la unidad de magnitud seleccionada por el usuario (amplitud RMS, potencia, energía, ASD, PSD o ESD).

Finalmente, se calcula el autoespectro promedio según el método de promediado lineal, que es el más habitualmente utilizado y se define como:

$$G_{XX} = \frac{G_{XX}^1 + G_{XX}^2 + \dots + G_{XX}^n}{n} \quad (5.25)$$

donde G_{XX}^n es el autoespectro instantáneo de la señal correspondiente a la ventana temporal n . Este método de promediado se aplica también al cálculo del espectro cruzado promedio.

5.5.2.3 Cálculo del espectro cruzado

El espectro cruzado de potencia es una función fundamental para el cálculo de otras funciones derivadas del análisis de doble canal, como veremos más adelante, y relaciona dos señales temporales $a(t)$ y $b(t)$ en el dominio de la frecuencia. Se define como:

$$S_{AB}[k] = \frac{FFT^*(a) \cdot FFT(b)}{N^2} \quad (5.26)$$

El espectro cruzado, complejo (información de amplitud y fase) y con simetría conjugada, también puede expresarse de la siguiente forma:

$$S_{AB}[k] = |A[k]| \cdot |B[k]| e^{j\Delta\phi[k]} = |A[k]| \cdot |B[k]| e^{j(\phi_B[k] - \phi_A[k])} \quad (5.27)$$

donde $\phi_A[k]$ y $\phi_B[k]$ son las fases de los espectros complejos $A[k]$ y $B[k]$, respectivamente. Por tanto, el espectro cruzado proporciona el producto de las amplitudes RMS de las componentes de frecuencia de las dos señales, $a(t)$ y $b(t)$, así como la diferencia de fase entre las mismas.

El espectro cruzado unilateral instantáneo, por tanto, se calcula como:

$$G_{AB}[k] = \begin{cases} \frac{2 \cdot FFT^*(a) \cdot FFT(b)}{N^2}, & k = 1 \dots N_f \\ \frac{FFT^*(a) \cdot FFT(b)}{N^2}, & k = 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

y el espectro cruzado promedio resultante viene dado por:

$$G_{AB} = \frac{G_{AB}^1 + G_{AB}^2 + \dots + G_{AB}^n}{n} \quad (5.29)$$

donde G_{AB}^n es el espectro cruzado instantáneo de la señal correspondiente a la ventana temporal n .

El promediado de los espectros cruzados instantáneos $S_{AB,i}[k]$ resulta en un espectro $S_{AB}[k]$ con una fase que es la media ponderada de las estimaciones individuales de $\Delta\phi_i[k]$, dependiendo esta ponderación de las amplitudes de $A_i[k]$ y $B_i[k]$. La amplitud de $S_{AB}[k]$ tendrá un valor entre cero y el promedio del producto de las amplitudes de $A_i[k]$ y $B_i[k]$ ($|A_i[k]| \cdot |B_i[k]|$), en función de la cantidad de fluctuación de la diferencia de fase $\Delta\phi_i[k]$ entre bloque y bloque. Esto se ilustra en la Figura 5.29.

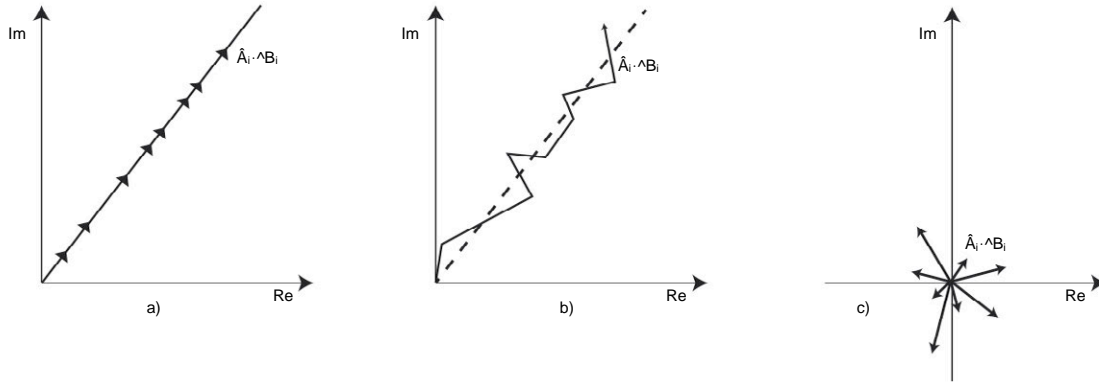


Figura 5.29. Promediado lineal de estimaciones instantáneas del espectro cruzado $S_{AB}[k]$: a) la fase de cada estimación $A_i^*[k] B_i[k]$ es la misma; b) pequeñas fluctuaciones en la fase de las estimaciones $A_i^*[k] B_i[k]$; c) fases aleatorias de las estimaciones $A_i^*[k] B_i[k]$. En la figura no se considera la dependencia con la frecuencia por conveniencia.

Así, la amplitud de $S_{AB}[k]$ no sólo dependerá de las amplitudes de $S_{AA}[k]$ y $S_{BB}[k]$, sino también de la cantidad de correlación existente entre $A_i^*[k]$ y $B_i[k]$; el concepto de correlación se discutirá en secciones posteriores. Una correlación perfecta a la frecuencia $f=k \cdot \Delta f$ causará que $\Delta\phi_i[k]$ sea la misma para cada estimación (Figura 5.29a); mientras que si no existe correlación entre las señales a dicha frecuencia las estimaciones $\Delta\phi_i[k]$ serán aleatorias con valores comprendidos entre 0 y 2π , causando que $S_{AB}[k]$ sea cero (Figura 5.29c). La Figura 5.29b muestra una situación en la que existe cierta correlación entre $A[k]$ y $B[k]$ a la frecuencia seleccionada. La amplitud de $S_{AB}[k]$ es por tanto bastante difícil de interpretar y no se suele emplear por sí misma.

La fase de $S_{AB}[k]$, sin embargo, es la diferencia de fase (promediada) entre las $b(t)$ y $a(t)$ para la frecuencia $f=k \cdot \Delta f$. En un análisis de entrada-salida de un sistema, la fase de $S_{AB}[k]$ proporciona la respuesta de fase de dicho sistema o, en términos generales, el desfase de la señal $b(t)$ respecto a la señal $a(t)$ en función de la frecuencia.

El espectro cruzado también puede expresarse, empleando la notación de espectro unilateral, como

$$G_{AB}[k] = C_{AB}[k] + jQ_{AB}[k] \quad (5.30)$$

donde $C_{AB}[k]$ es la parte donde $A[k]$ y $B[k]$ están en fase y se denomina espectro coincidente o simplemente coespectro. La parte imaginaria $Q_{AB}[k]$ es la parte donde $A[k]$ y $B[k]$ están desfasados 90° y se denomina espectro de cuadratura.

5.5.2.4 Cálculo de la coherencia

En análisis de sistemas es de gran importancia, como parte del análisis, evaluar el grado de linealidad existente entre la entrada y la salida del mismo. Sean dos variables estocásticas x e y , que pudieran ser las mediciones de la entrada y la salida de un sistema, la correlación entre estas variables se describe por el denominado coeficiente de correlación ρ_{xy} definido como:

$$\rho_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (5.31)$$

donde σ_{xy} es la covarianza de x e y dada por

$$\sigma_{xy} = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] \quad (5.32)$$

y σ_x y σ_y son las desviaciones estándar de x e y dadas por

$$\sigma_x = \sqrt{E[(x - \mu_x)^2]} \quad (5.33)$$

y

$$\sigma_y = \sqrt{E[(y - \mu_y)^2]} \quad (5.34)$$

E es el valor esperado (o esperanza matemática), mientras que μ_x y μ_y son los valores de la media de x e y , respectivamente; es decir:

$$\begin{aligned}\mu_x &= E[x] \\ \mu_y &= E[y]\end{aligned}\tag{5.35}$$

El valor de $|\rho_{xy}|$ varía entre 0 y 1. Si existe una relación perfectamente lineal entre x e y ($y=\alpha x+\beta$) para todas sus muestras (siendo α y β constantes), $|\rho_{xy}|$ será 1. Esta situación se ilustra en la Figura 5.30a.

Si las muestras de x e y están contaminadas con ruido aleatorio, como se muestra en la Figura 5.30b, $|\rho_{xy}|$ será menor que 1 (nótese la relación lineal subyacente entre x e y). Esta podría ser la situación en la que un sistema bajo análisis es perfectamente lineal pero existe algún ruido extraño en las mediciones de la entrada x y/o la salida y . En una situación donde la relación entre x e y está bien definida pero no es lineal, el valor de $|\rho_{xy}|$ será también menor que 1, incluso aunque las muestras estén libres de ruido aleatorio. Un ejemplo de esta situación se muestra en la Figura 5.30c. Si dichas variables son independientes, es decir, no están relacionadas en absoluto entre sí, las muestras estarán esparcidas al azar como se muestra en la Figura 5.30d, y el coeficiente de correlación ρ_{xy} será cero.

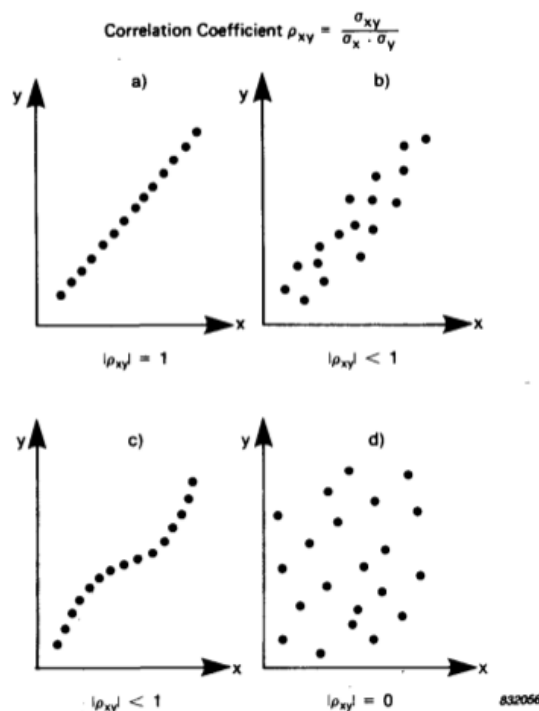


Figura 5.30. El coeficiente de correlación ρ_{xy} indica la cantidad de linealidad entre las variables x e y .

Una de las funciones adicionales del analizado FFT de doble canal es la función de coherencia $\gamma^2[k]$, definida por:

$$\gamma^2[k] = \frac{|G_{AB}[k]|^2}{G_{AA}[k] \cdot G_{BB}[k]} = \frac{|S_{AB}[k]|^2}{S_{AA}[k] \cdot S_{BB}[k]} \quad (5.36)$$

Para cada frecuencia $f=k \cdot \Delta f$, la función de coherencia se corresponde con la función de correlación elevada al cuadrado, dada por:

$$\rho_{xy}^2 = \frac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2} \quad (5.37)$$

Sea x la componente espectral compleja a la frecuencia $f=k \cdot \Delta f$, $A[k]$, e y la componente espectral compleja a la misma frecuencia f , $B[k]$. Comparando la ecuación (5.25) para los autoespectros promedio $G_{AA}[k]$ y $G_{BB}[k]$ con las ecuaciones (5.33) y (5.34), y la ecuación (5.29) para el espectro cruzado promedio $G_{AB}[k]$ con la ecuación (5.32), es posible establecer que la coherencia y el coeficiente de correlación al cuadrado son similares (más allá de la sustracción de los valores medios μ_x y μ_y de x e y en σ_x , σ_y y σ_{xy} , y de la conjugación compleja debido al hecho de que los componentes espectrales $A[k]$ y $B[k]$ son complejos).

De forma similar al coeficiente de correlación, la coherencia $\gamma^2[k]$ de las señales $a(t)$ y $b(t)$ es una función que, en una escala de 0 a 1, mide el grado de dependencia lineal entre las dos señales a una frecuencia dada $f=k \cdot \Delta f$.

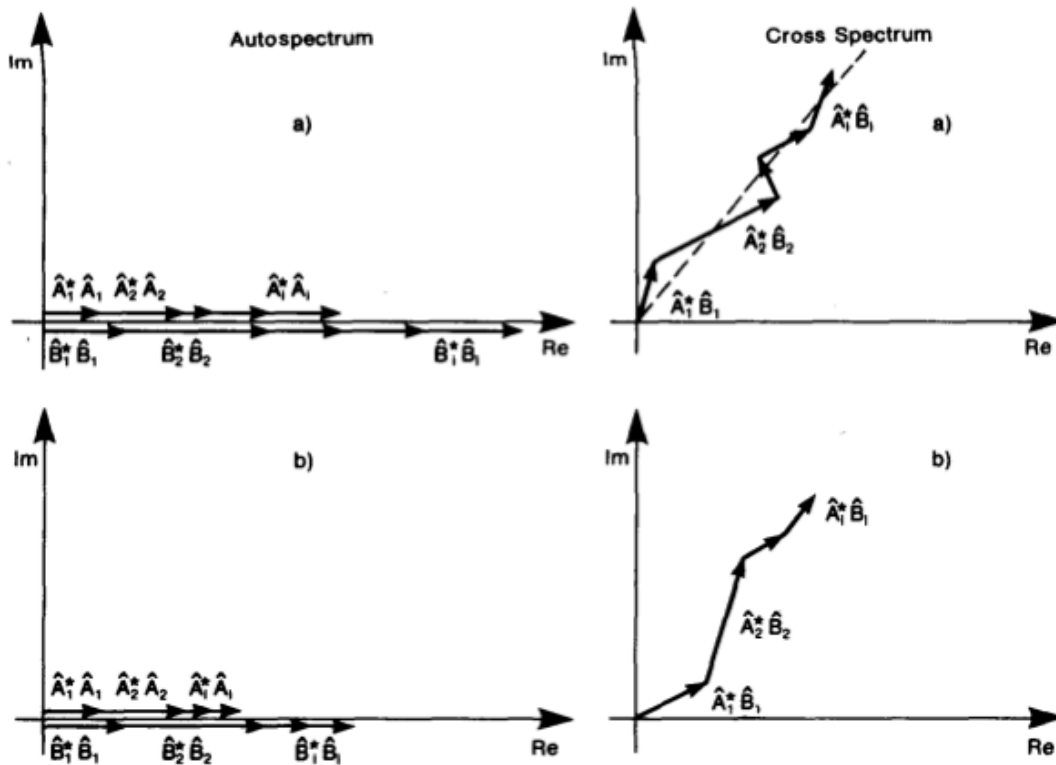


Figura 5.31. Efectos en la estimación del Autoespectro y el Espectro Cruzado de: a) ruido en la medición de $a(t)$ y/o $b(t)$; b) no linealidad del sistema. Por comodidad, se omite la dependencia de la frecuencia.

Sin entrar en una discusión detallada sobre el tema, las causas más comunes de obtener una coherencia menor que 1 se enumeran a continuación:

- Ruido no correlado en las mediciones de $a(t)$ y/o $b(t)$.
- No linealidad del sistema bajo análisis
- Leakage en el análisis
- Retardo (entrada-salida) en el sistema no compensado para el análisis

5.5.2.5 Cálculo de la FRF

La aplicación más común del análisis FFT de doble canal es la estimación de la función de respuesta en frecuencia FRF de sistemas físicos. Con referencia al sistema ideal de la Figura 5.32, la FRF describe el sistema en el dominio de la frecuencia y se define como:

$$H(f) = \frac{B(f)}{A(f)} \quad (5.38)$$

El sistema también puede describirse en el dominio del tiempo por la Función de Respuesta al Impulso (IRF, del inglés Impulse Response Function) $h(\tau)$, definida como la transformada inversa de Fourier de $H(f)$:

$$h(\tau) = F^{-1}\{H(f)\} \quad (5.39)$$

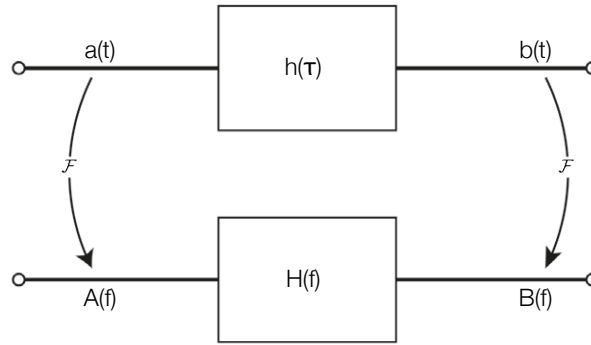


Figura 5.32. Sistema ideal con una señal de entrada $a(t)$ y una señal de salida $b(t)$. $A(f)$ y $B(f)$ son las Transformadas de Fourier de $a(t)$ y $b(t)$, respectivamente.

Para describir un sistema en términos de la FRF $H(f)$ es necesario realizar una serie de supuestos sobre el mismo:

- 1) El sistema debe ser físicamente realizable, es decir, no puede responder a una entrada antes de que esta sea aplicada:

$$h(\tau) = 0, \quad \tau < 0 \quad (5.40)$$

- 2) El sistema debe ser invariante en el tiempo. Sus propiedades no pueden cambiar con el tiempo, es decir, $h(\tau)$ y $H(f)$ son independientes del tiempo:

$$h(\tau, t) = h(\tau) \quad \& \quad H(f, t) = H(f), \quad -\infty < t < \infty \quad (5.41)$$

- 3) El sistema debe ser estable, es decir, sólo puede responder con una cantidad limitada de energía cuando es excitado con una cantidad finita de energía. Esto también se cumple si:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty \quad (5.42)$$

- 4) El sistema debe ser lineal. Esto significa que si las entradas $a_1(t)$ y $a_2(t)$ producen las salidas $b_1(t)$ y $b_2(t)$ respectivamente, entonces la entrada $a_1(t)+a_2(t)$ debe producir la salida $b_1(t)+b_2(t)$; y la entrada $c \cdot a_1(t)$ debe ocasionar la salida $c \cdot b_1(t)$, donde c es una constante arbitraria. La esencia de esto reside en que las funciones $h(\tau)$ y $H(f)$ caracterizan el propio sistema independiente de las señales $a(t)$ y $b(t)$ implicadas.

La suposición de linealidad es probablemente el requisito que más se incumple en aplicaciones prácticas. Por un lado, la señal de entrada puede tener unos niveles de amplitud tan grandes que el sistema se excite más allá de su rango de comportamiento lineal. Además, algunos sistemas son inherentemente no lineales y la función de respuesta del sistema no será válida salvo para rangos muy limitados de nivel de la señal de entrada.

Las estimaciones de la FRF empleando el análisis FFT de doble canal proporciona el cálculo óptimo de $H(f)$ en términos de mínimos cuadrados. Si la señal de entrada es aleatoria se obtiene la mejor aproximación lineal al sistema y la FRF puede ser, por tanto, muy útil y proporcionar resultados significativos, salvo que el sistema tenga un fuerte comportamiento no lineal.

Detallaremos ahora la estimación de la FRF de un sistema que cumple con todos los requisitos citados con anterioridad, haciendo uso del analizador FFT de doble canal. La ecuación fundamental que relaciona los espectros de entrada y de salida, teniendo en cuenta que estamos trabajando en dominios discretos de tiempo y de frecuencia (DFT), es la siguiente:

$$B[k] = H[k] \cdot A[k] \quad (5.43)$$

Multiplicando por $A^*[k]$ ambos lados de esta ecuación obtenemos:

$$A^*[k] \cdot B[k] = H[k] \cdot A^*[k] \cdot A[k] \quad (5.44)$$

o

$$S_{AB}[k] = H[k] \cdot S_{AA}[k] \quad (5.45)$$

En la práctica son las estimaciones promedio de $S_{AB}[k]$ y $S_{AA}[k]$, o $G_{AB}[k]$ y $G_{AA}[k]$, las que se miden con el analizador de doble canal. Por tanto, la relación de estas estimaciones proporcionan una medida de la FRF denominada $H_1[k]$, o $H_1(f)$ en términos de frecuencia continua. Empleando el espectro unilateral obtenemos a partir de la ecuación (5.45):

$$H[k] = \frac{G_{AB}[k]}{G_{AA}[k]} = H_1[k] \quad (5.46)$$

Multiplicando por $B^*[k]$ ambos lados de la ecuación (5.43), en lugar de $A^*[k]$, obtenemos:

$$B^*[k] \cdot B[k] = H[k] \cdot B^*[k] \cdot A[k] \quad (5.47)$$

o

$$S_{BB}[k] = H[k] \cdot S_{BA}[k] \quad (5.48)$$

Utilizando esta ecuación comprobamos que la relación entre las estimaciones de $S_{BB}[k]$ y $S_{BA}[k]$, o $G_{BB}[k]$ y $G_{BA}[k]$, también proporciona una medida de la función de respuesta en frecuencia $H[k]$. Esta estimación se denomina $H_2[k]$ –ó $H_2(f)$ – y en muchos casos prácticos proporcionará un resultado diferente al de $H_1[k]$. En términos de espectros unilaterales, tenemos:

$$H[k] = \frac{G_{BB}[k]}{G_{BA}[k]} = H_2[k] \quad (5.49)$$

Nótese que la fase de $H_1[k]$ es la misma que la fase de $H_2[k]$ ya que $G_{BA}^*[k] = G_{AB}[k]$. Nótese también que

$$\frac{H_1[k]}{H_2[k]} = \frac{G_{AB}[k] \cdot G_{BA}[k]}{G_{AA}[k] \cdot G_{BB}[k]} = \gamma^2[k] \quad (5.50)$$

A continuación se indica la preferencia de uso de una u otra estimación de la FRF del sistema en base a diferentes factores o situaciones que influyen en exactitud de las mismas:

- Cuando existe ruido extraño en la salida, o varias entradas independientes al sistema, se debe usar la estimación $H_1(f)$.
- Cuando existe ruido extraño en la entrada se debe emplear $H_2(f)$.
- Si existen problemas de 'leakage' en los picos de resonancia (sesgo en la resolución) $H_2(f)$ proporciona una mejor estimación que $H_1(f)$.

En una medición práctica, diferentes situaciones ocurren para diferentes frecuencias. Para conseguir una estimación óptima de la FRF a partir de una medición, debería de usarse $H_1(f)$ en algunas frecuencias y $H_2(f)$ en otras.

En general, $H_1(f)$ debería emplearse para los valles, donde el ruido a la salida suele predominar, y $H_2(f)$ en los picos, donde el ruido de la entrada o el 'leakage' suelen causar problemas. En situaciones con ruido tanto en la entrada como en la salida, y cuando el 'leakage' no provoca errores de sesgo, $|H_1(f)|$ y $|H_2(f)|$ pueden emplearse para proporcionar un límite superior e inferior, respectivamente, a la verdadera $|H(f)|$.

5.5.2.6 Configuración y uso del analizador FFT

El módulo de análisis FFT de doble canal, como se desprende de lo comentado anteriormente, permite la obtención de las siguientes funciones:

- Autoespectros $G_{AA}(f)$ y $G_{BB}(f)$ de las señales de entrada y de salida del sistema bajo análisis previamente importadas en el módulo de entrada (FFT de doble canal), y correspondientes a las mediciones de la excitación y la respuesta del sistema en diferentes posiciones de medida (la posición de excitación debe ser única). En caso de tratarse de un análisis FFT monocanal, se calcula el Autoespectro $G_{XX}(f)$ de

cada una de las señales importadas. El Autoespectro se escalará de acuerdo a la unidad de magnitud seleccionada en el panel de configuración.

Asimismo, cuando se disponga de varias mediciones de la excitación y la respuesta del sistema para los mismos puntos de las mismas, el módulo proporciona el Autoespectro promedio resultante de dichas mediciones $-G_{AAavg}(f)$, $G_{BBavg}(f)$ o $G_{XXavg}(f)$, según corresponda.

- Espectro cruzado $G_{AB}(f)$ de las señales de respuesta (salida) importadas y sus correspondientes señales de excitación (entrada), escalado de acuerdo a la unidad de magnitud seleccionada en el panel de configuración; así como el espectro cruzado promedio $G_{ABavg}(f)$ resultante de las diferentes mediciones disponibles para una misma combinación de posiciones de medida de entrada/salida. Función sólo disponible para el análisis FFT de doble canal.
- Coherencia $\gamma^2(f)$ entre las señales de respuesta y de excitación importadas, así como entre las respuestas y excitaciones promedio resultantes de las diferentes mediciones en cada posición de medida de entrada/salida. Función sólo disponible para el análisis FFT de doble canal si la función de espectro cruzado está activada.
- Función de respuesta en frecuencia $H(f)$ del sistema para cada medición de entrada/salida, así como la respuesta en frecuencia promedio $H_{avg}(f)$ de las diferentes mediciones para cada par de puntos de medida de entrada/salida. El cálculo de la función de respuesta en frecuencia se realiza según el método establecido en el panel de configuración. Función sólo disponible para el análisis FFT de doble canal si la función de espectro cruzado está activada.

El panel de configuración del módulo FFT permite el ajuste de los siguientes parámetros del análisis FFT:

- Tipo de análisis FFT. Es posible seleccionar entre análisis FFT de un solo canal o análisis FFT de doble canal. En función del tipo de análisis elegido, se habilitará el cálculo de las funciones pertinentes.

- Canal de referencia. Indica el canal empleado para la medición de la excitación aplicada al sistema para la obtención de las correspondientes respuestas en los diferentes puntos de medida. En este caso designa el punto de excitación del sistema, común para todas las mediciones.
- Frecuencia de muestreo f_s empleada en el proceso de adquisición de datos.
- Ancho de banda ('Span'). Determina el ancho de banda de interés para el análisis, siendo la frecuencia máxima posible $f_{\max} = f_s / 2.56$. Parámetro seleccionable entre aquellos valores submúltiplos del máximo permitido resultantes de su división por una potencia de dos:

$$SPAN_n = \frac{2^{-n} f_s}{2.56}; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.51)$$

La selección de un ancho de banda menor al máximo permitido es equivalente a reducir la frecuencia de muestreo por el mismo factor y extender el análisis hasta f_{\max} . Así, en este caso se realiza un proceso de diezmado previo al análisis FFT para optimizar la tasa de muestras temporales al ancho de banda de interés, de forma análoga al funcionamiento de la etapa de muestreo y adquisición de datos de un analizador FFT comercial. El diezmado lleva asociado un filtrado antialiasing previo, garantizando así el cumplimiento del teorema de Nyquist.

- Número de líneas en frecuencia. Determina el número de puntos o líneas de frecuencia del espectro discreto de la señal dentro del ancho de banda de análisis. Este parámetro determina el tamaño de la ventana N y, por tanto, la resolución en frecuencia Δf del análisis FFT:

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{f_s}{2.56 \cdot N_f} = \frac{f_{\max}}{N_f} \quad (5.52)$$

Los valores permitidos para este parámetro, teniendo en cuenta que los tamaños de ventana han de ser potencia de dos para optimizar el cálculo mediante la FFT, vienen dados por:

$$N_f = \frac{2^m}{2.56}, \quad m = 8 \dots 15 \quad (5.53)$$

El valor de la resolución en frecuencia resultante de la configuración de los parámetros 'Span' y número de líneas en frecuencia se indica en el campo 'deltaF' del panel de configuración.

- Tipo de ventana. Seleccionable entre: Rectangular, Hanning, Hamming, Blackman-Harris.
- Número de ventanas de análisis promediadas n_w .
- Solapamiento entre ventanas consecutivas, en tanto por cien.
- Unidad de magnitud. Permite seleccionar la unidad de magnitud para la representación espectral:
 - RMS o valor eficaz
 - PWR o potencia
 - PSD o densidad espectral de potencia
 - ASD o densidad espectral de amplitud
 - ESD o densidad espectral de energía
- Escala de nivel. Permite seleccionar la unidad de escala de la magnitud espectral a representar: lineal o dB.

La configuración empleada para el análisis espectral de la respuesta temporal del resonador bajo ensayo se muestra a continuación en la Tabla 5.XI.

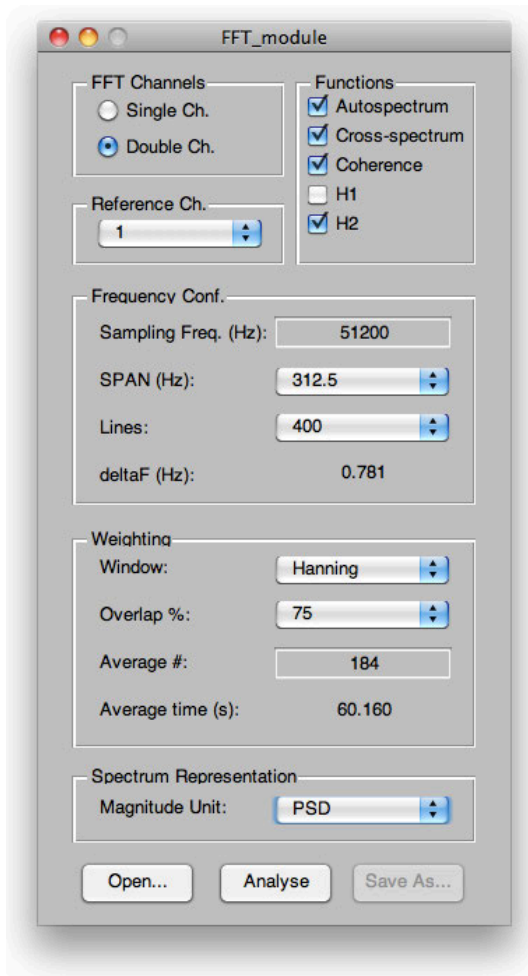


Tabla 5.XI. Ajuste de los parámetros de configuración del módulo FFT.

También permite importar los datos de un análisis previo ('Open'), en caso de disponer del fichero de resultados correspondiente, para su posterior análisis modal en el siguiente módulo. Tras finalizar el proceso de análisis ('Analyse'), es posible guardar en un archivo .mat el array de estructuras generado con toda la información resultante del análisis FFT ('Save As...'). De forma análoga al generado en el módulo de entrada, cada estructura se corresponde con un punto de medida y está formada por los siguientes campos:

- Sxx. En este campo se almacenan y agrupan en una misma matriz de datos las estimaciones del autoespectro (vectores columna) correspondientes a cada una de las mediciones realizadas en el punto de medida correspondiente. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times m$, donde N_f es el número de líneas de frecuencia y m el número de mediciones realizadas.

- *Sxx_avg*. En este campo se almacena la estimación del autoespectro promedio de todas las mediciones realizadas en el punto de medida correspondiente. Al igual que *Sxx*, es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.
- *Sxy*. Este campo contiene una matriz de datos con las estimaciones del espectro cruzado (vectores columna) de las diferentes respuestas registradas en el punto de medida correspondiente y a las excitaciones pertinentes del punto de referencia (*Ref*). Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times m$.
- *Sxy_avg*. Contiene la estimación del espectro cruzado promedio de todas las mediciones realizadas en los puntos de medida y excitación correspondientes. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.
- *Coh*. En este campo se almacenan y agrupan en una misma matriz de datos las funciones coherencia (vectores columna) correspondientes a cada una de las mediciones realizadas en el punto de medida correspondiente (y las pertinentes mediciones de la excitación en el punto de referencia). Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times m$.
- *Coh_avg*. Contiene la función coherencia promedio de todas las mediciones realizadas en los puntos de medida y excitación correspondientes. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.
- *FRF*. Aquí se almacenan y agrupan en una misma matriz de datos las funciones de respuesta en frecuencia (vectores columna) correspondientes a cada una de las mediciones realizadas en los puntos de medida y excitación correspondientes. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times m$.
- *FRF_avg*. Contiene la función de respuesta en frecuencia promedio de todas las mediciones realizadas en los puntos de medida y excitación correspondientes. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.
- *Faxis*. Vector con las frecuencias asociadas a cada línea de frecuencia, de dimensiones $1 \times N_f$.

- *Magnitude Unit*. Unidad de magnitud espectral calculada (RMS, PWR, PSD, ESD o ASD). Es de tipo 'char'.
- *Node*. Este campo indica el punto de medida al que corresponden todos los datos de la estructura. Es de tipo 'char'.
- *Ref*. Punto de excitación, o punto de medida de referencia para el cálculo del espectro cruzado, la función de coherencia y la función de respuesta en frecuencia. Es de tipo 'char'.
- *File*. Campo en el que se recogen los archivos originales ("excitación_fecha_hora.txt") de procedencia de los datos temporales a partir de los cuales se realiza el análisis FFT. El nombre de estos archivos, como se ha comentado, se emplea para identificar la señal temporal de excitación (vector columna) correspondiente a cada medición de la respuesta temporal (campo *Data* de la estructura generada en el módulo de entrada). Este campo es de tipo 'cell array', con dimensiones $1 \times m$ (tantas columnas como mediciones realizadas en el punto pertinente).
- *Info*. Contiene información relevante para la caracterización del tipo de señal registrada: unidad de magnitud, valor de referencia y escala (Lin/dB). Este campo es de tipo 'cell array', con dimensiones 3×1 .

5.5.3 Módulo de análisis modal

Este módulo permite la detección de las frecuencias de resonancia del sistema bajo ensayo, con el fin de realizar la posterior identificación de los modos propios del mismo. La detección de las frecuencias de resonancia se basa en el método de ajuste de curva 'Peak Picking', a partir del cual se localizan los máximos relativos de la función de respuesta en frecuencia promedio FRF_{avg} . Por tanto, es necesario el cálculo de la FRF_{avg} para ejecutar el módulo de análisis modal.

Los máximos relativos de la curva se determinan a partir de su primera derivada, correspondiendo a aquellos puntos en los que esta se hace cero, siendo la pendiente en el punto inmediatamente anterior positiva, y negativa a continuación. Además, para considerar un máximo relativo como resonancia del sistema, se

introducen dos condiciones adicionales con el fin de evitar picos espurios o dudosos cuya aparición pudiera ser debida a pequeños rizados en el espectro.

La primera condición establece un número mínimo de líneas espectrales a cada lado del máximo relativo para las que la curva espectral ha de permanecer por debajo del nivel del propio máximo. Esta condición se ajusta mediante el parámetro “rango para máximo” (o ‘Range for Maximum’).

La segunda condición establece una diferencia mínima, en dB, entre el nivel del máximo relativo y el valor mínimo de la curva espectral en el rango de líneas de frecuencia establecido anteriormente. Con esto se persigue que el máximo tenga una forma suficientemente acentuada, y no forme parte de un intervalo con una tendencia plana. Esta diferencia de nivel se ajusta mediante el parámetro “mínima diferencia de nivel” (o ‘Min. Level Difference’).

Además, a la hora de representar gráficamente los resultados del análisis modal en el módulo de visualización (que comentaremos a continuación), y en caso de haber calculado en el módulo FFT la función de coherencia para las mediciones realizadas, se indicará si las frecuencias de resonancia obtenidas corresponden a puntos con un valor suficiente de coherencia (respecto del umbral que establezcamos) para ser consideradas como tal; o si, por el contrario, no puede garantizarse su identificación como frecuencia propia del sistema.

Previamente a la localización de los máximos de la curva espectral, es posible aplicar un suavizado a la misma (‘Spectral Smoothing’) mediante la técnica de promediado móvil (‘Moving Average’). La configuración de la agresividad de este suavizado espectral se determina a partir del número de puntos, o líneas de frecuencia, a promediar.

Por último, es posible establecer el rango de análisis modal (o ‘Analysis Range’), en Hz, en el cual se identificarán las resonancias del sistema, pudiendo ser menor que el ancho de banda del análisis FFT realizado previamente. La configuración del módulo de análisis modal empleada para la identificación de los primeros modos propios del resonador se muestra en la Figura 5.33.

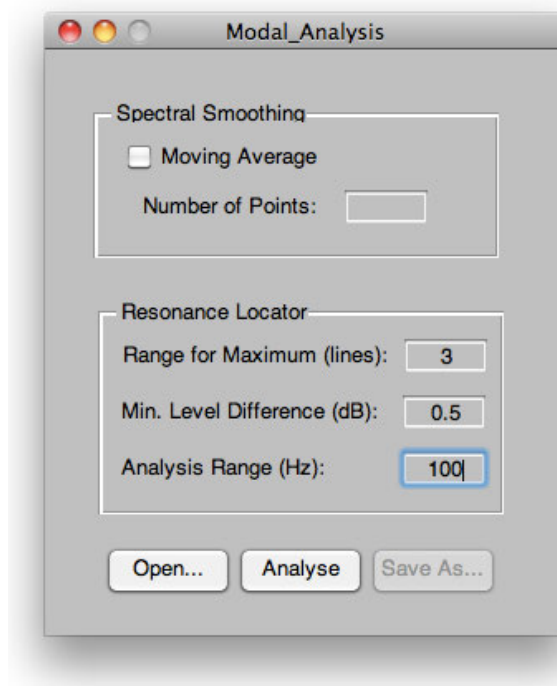


Figura 5.33. Ajuste de los parámetros de configuración del módulo de análisis modal.

Es posible importar los datos de un análisis previo ('Open'), en caso de disponer del fichero de resultados correspondiente, para su posterior visualización. Una vez realizado el análisis modal ('Analyse'), es posible guardar en un archivo .mat los resultados obtenidos. El archivo generado contiene un array de estructuras en el que se incluyen los siguientes campos:

- *Sxx_avg*. Autoespectro promedio calculado en el módulo FFT. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.
- *Sxy_avg*. Espectro cruzado promedio calculado en el módulo FFT. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.
- *Coh_avg*. Función coherencia promedio calculada en el módulo FFT. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.
- *FRF_avg*. Función de respuesta en frecuencia promedio calculada en el módulo FFT. Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.
- *MODALmag*. Módulo de la función de respuesta en frecuencia promedio resultante del suavizado espectral (si se aplica). Es de tipo 'double' y sus dimensiones son $N_f \times 1$.

- *MODALphs*. Fase de la función de respuesta en frecuencia promedio (o autoespectro en su defecto) resultante del suavizado espectral (si se aplica). Es de tipo 'cell array' con dimensiones 1x1.
- *Eigenfreq*. Contiene las frecuencias de resonancia identificadas para el punto de medida correspondiente. Es de tipo 'cell array' con dimensiones 1x1 (contiene un array de tipo 'double' con tantos elementos como frecuencias de resonancia identificadas).
- *Eigenmag*. Contiene el módulo de la FRF para las frecuencias de resonancia identificadas en el punto de medida correspondiente. Es de tipo 'cell array' con dimensiones 1x1 (contiene un array de tipo 'double' con tantos elementos como frecuencias de resonancia identificadas).
- *Eigenphs*. Contiene la fase de la FRF para las frecuencias de resonancia identificadas en el punto de medida correspondiente. Es de tipo 'cell array' con dimensiones 1x1 (contiene un array de tipo 'double' con tantos elementos como frecuencias de resonancia identificadas).
- *Faxis*. Vector con las frecuencias asociadas a cada línea de frecuencia, de dimensiones $1 \times N_f$.
- *Magnitude Unit*. Unidad de magnitud espectral calculada (RMS, PWR, PSD, ESD o ASD).
- *Node*. Este campo indica el punto de medida al que corresponden todos los datos de la estructura. Es de tipo 'char'.
- *Ref*. Punto de excitación, o punto de medida de referencia para el cálculo del espectro cruzado, la función de coherencia y la función de respuesta en frecuencia.
- *Info*. Contiene información relevante para la caracterización del tipo de señal registrada: unidad de magnitud, valor de referencia y escala (Lin/dB). Este campo es de tipo 'cell array', con dimensiones 3x1.

Puesto que contiene todos los datos de las funciones espectrales (promedio) calculados en el módulo FFT, este array de estructuras permite la visualización en el siguiente módulo de los resultados de ambos análisis: FFT y Modal.

5.5.4 Módulo de visualización

El último módulo de la herramienta desarrollada para el análisis modal del resonador permite representar gráficamente los resultados obtenidos en el análisis FFT-Modal realizado en los módulos anteriores. Para ello será necesario haber tener cargados en memoria el array de estructuras pertinente (bien tras la ejecución del análisis correspondiente, o tras cargar el archivo .mat en los módulos anteriores).

En la Figura 5.34 podemos observar la ventana del módulo de visualización, con los diferentes parámetros de control y la zona de representación gráfica. En primer lugar se debe seleccionar el tipo de análisis ('Analysis Type') cuyos resultados se pretenden visualizar: "FFT" o "Modal" (disponibles en función de los datos cargados en memoria). Mediante el selector de función espectral ('Spectral Function') es posible seleccionar el tipo de datos a representar (las opciones disponibles también dependen del array de estructuras cargado en memoria).

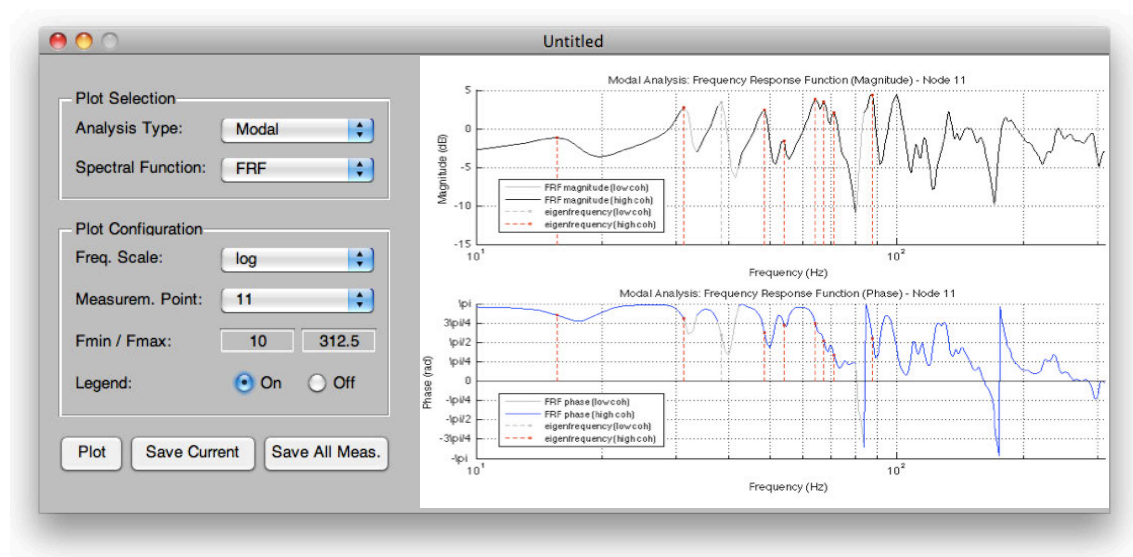


Figura 5.34. Ventana del módulo de visualización.

El parámetro 'Measurem. Point' permite seleccionar el punto de medida del que se quiere visualizar la respuesta espectral. Para las funciones espectrales calculadas en el análisis FFT es posible seleccionar la visualización de los datos para un punto de medida concreto, como la visualización conjunta de los mismos para todos los puntos ('all'). Los resultados del análisis modal (opción "MODAL"), sin embargo, sólo pueden visualizarse para un punto determinado.

El resto de parámetros de configuración permiten la selección de la escala de frecuencia ('Frequency Scale' – "lin" o "dB"), la escala de magnitud ('Magnitude Scale' – "lin" o "dB") y los límites mínimo y máximo del eje de frecuencia ('Fmin / Fmax').

Una vez ajustados los parámetros de configuración es posible imprimir los resultados en pantalla mediante el botón 'Plot Results'. El botón 'Save Current' permite guardar la gráfica actual, mientras que con 'Save All Meas' es posible guardar las gráficas de todos los puntos de medida para la función espectral seleccionada según la configuración establecida.

6 Resultados

El principal objetivo del análisis modal del resonador bajo ensayo es la identificación de sus primeros modos propios, los cuales tienen lugar dentro del margen de frecuencias de interés establecido con anterioridad: 1-100 Hz. A lo largo de este capítulo se exponen y se evalúan los resultados obtenidos en dicho análisis, a partir de las estimaciones de la función de respuesta en frecuencia del sistema en los diferentes puntos de medida considerados.

Asimismo, se presentan los resultados de la simulación del modelo mecánico de la placa del resonador, sin considerar el acoplamiento acústico con el aire encerrado en las cavidades, mediante el método de elementos finitos (FEM). Los modos propios obtenidos por este método de análisis numérico se compararán con aquellos obtenidos en el análisis experimental, con el fin de evaluar la influencia del acoplamiento estructura-fluido.

Finalmente, se ha elaborado un modelo simplificado del resonador con el que se pretende simular el comportamiento dinámico del sistema completo, considerando el acoplamiento entre la estructura y el colchón de aire encerrado en las cavidades. Dicha simplificación, como veremos más adelante, consiste en modelar únicamente la mitad del resonador (mitad de la placa más una de las cavidades), basándonos en las condiciones de simetría que presenta el resonador. Todas las simulaciones se han realizado mediante el software SYSNOISE, mientras que para la elaboración de las mallas de los diferentes elementos que conforman el modelo se ha empleado la aplicación ANSYS.

6.1 Modos propios del modelo de la placa (sin acoplamiento)

Antes de valorar los resultados del análisis experimental, nos centraremos en el comportamiento vibratorio de la placa del resonador por sí misma, sin ningún tipo de acoplamiento. Puesto que no es posible desmontar el resonador objeto de ensayo, y no se dispone de otra placa de idénticas características (el contrachapado de madera no es un material que se caracterice por tener una gran homogeneidad, como comprobaremos más adelante, por lo que tampoco sería fácil encontrar una pieza de idénticas propiedades), esta valoración se ha realizado a partir del análisis numérico por el método FEM.

El modelo se ha realizado conforme a las dimensiones del sistema empleado para las mediciones experimentales. El mallado del mismo para la zona en contacto con el marco doble del resonador, de 4,5 cm de ancho, y donde se encuentra fijada al mismo, se ha realizado con una separación entre líneas de 1,125 cm en la dirección del correspondiente listón de madera. Para el mallado del área sobre las cavidades, se ha seguido la misma estrategia de muestreo espacial empleada para determinar las posiciones de medida para la colocación de los acelerómetros. Así, la resolución empleada es de 5 cm entre líneas tanto en sentido horizontal como vertical, siendo coincidentes los nodos de la malla con los puntos de medida. Esta resolución es, además, más que suficiente para el margen de frecuencias de interés. Recordemos que la separación entre nodos de un modelo debe ser inferior a la sexta parte de la longitud de onda de la máxima frecuencia de análisis.

En cuanto a las condiciones frontera correspondientes a la fijación de la placa, es realmente complicado llegar a simular con precisión las condiciones reales de fijación entre elementos existentes en situaciones prácticas. Para la elaboración del presente modelo, se ha optado por una fijación completa (tanto desplazamiento como rotación igual a cero) en el borde exterior de la placa, para todos los elementos que componen el marco del resonador. En cambio, para los elementos de la línea central de cuantas constituyen el travesaño interior, se ha optado por la condición de placa apoyada, donde tan sólo se limita el desplazamiento de la placa, pudiendo darse movimientos de rotación. Esta situación es la que mejor se adapta a las condiciones prácticas; además que una fijación completa supondría independizar las dos mitades de la placa, lo que contradice lo observado en el análisis experimental. Al excitar una de las dos mitades de la placa, la vibración sí se transmite a la otra mitad.

Una vez introducidas las propiedades físicas del material de la placa, establecidas en el apartado 5.3, y las condiciones de contorno de la misma, se ha realizado el análisis modal del modelo.

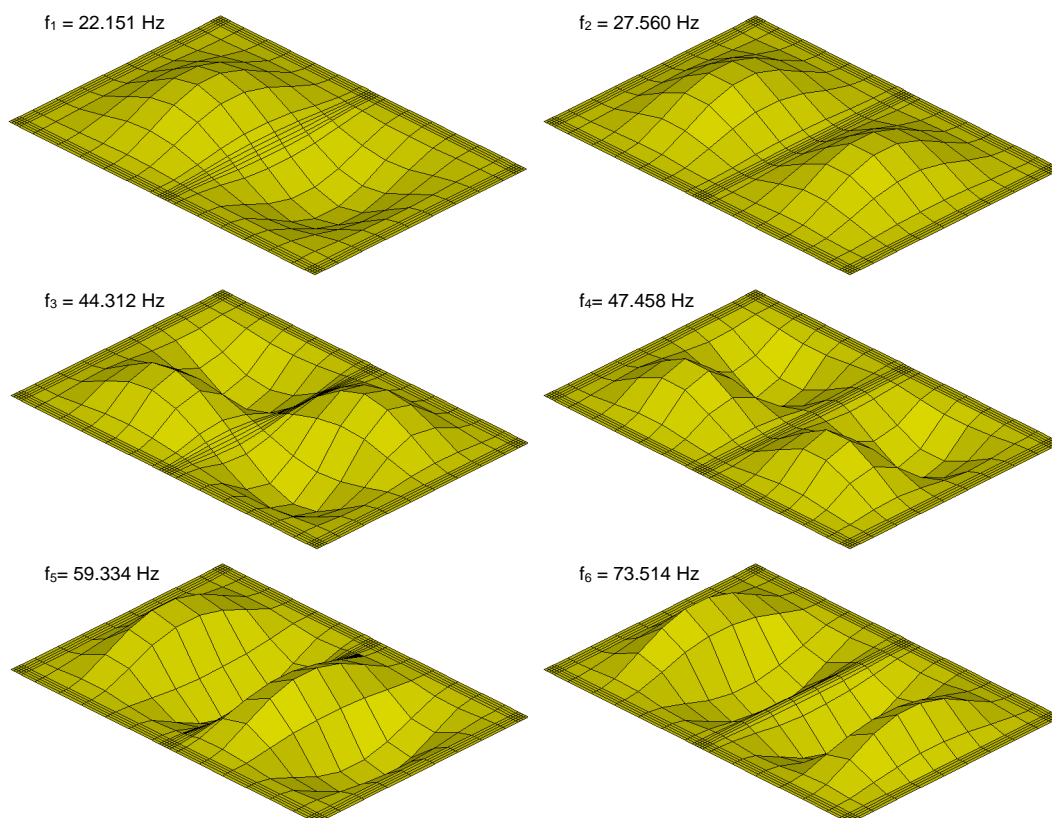


Figura 6.1. Patrones de desplazamiento de los seis primeros modos propios de flexión de la placa, ordenados de menor a mayor, de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

En la Figura 6.1 se muestran los patrones de desplazamiento de los seis primeros modos propios de flexión de la placa obtenidos, y sus frecuencias correspondientes se recogen en la Tabla 6.I.

Orden del modo	Patrón modal	Frecuencia propia (Hz)
1	(1,2)	22.2
2	(1,2) simétrico	27.6
3	(2,2)	44.3
4	(2,2) simétrico	47.5
5	(1,4)	59.3
6	(1,4) simétrico	73.5

Tabla 6.I. Frecuencias propias de la placa sin acoplamiento.

Como era de esperar, debido a la fijación de la placa en su eje de simetría transversal, su primer patrón modal se corresponde al modo (1,2) de la placa únicamente fija en sus extremos. También se puede observar que, por este mismo motivo, no sólo se producen modos antisimétricos respecto de la línea de fijación

interior, sino que también es posible la aparición modos simétricos (de diferente frecuencia respecto a los patrones homólogos antisimétricos).

6.2 Modos propios acoplados del modelo del resonador

Una vez obtenidos los modos propios de la placa sola, se ha desarrollado un modelo mecanico-acústico del resonador con el fin de obtener una primera valoración del comportamiento del mismo. Debido a las dificultades que entraña el acoplamiento estructura-fluido en el análisis FEM-FEM, y las restricciones de este último, se ha empleado un modelo simplificado de la mitad del resonador (mitad de la placa más una cavidad) aprovechando su simetría respecto del travesaño que separa las dos cavidades y sobre el que se apoya el eje transversal de la placa.

La malla empleada para modelar la placa se corresponde con una de las mitades de la malla empleada para el modelo de la placa completa sola. Por su parte, la malla volumétrica de la cavidad se ha definido a partir de los nodos de la placa comunes a ambos elementos, dotándola finalmente de un espesor correspondiente a la profundidad de la cavidad. Las condiciones frontera se corresponden con las establecidas para el modelo mecánico de la placa completa sin acoplamiento; es decir, fijos aquellos lados que se corresponden con el perímetro externo de la placa, y apoyado el lado correspondiente al eje de simetría trnasversal de la misma. El acoplamiento (o 'link') estructura-fluido se establece para los elementos de superficie comunes a la placa y la cara superior de la cavidad .

Una vez finalizada la caracterización del modelo, se procede al cálculo de los cuatro primeros modos acoplados, cuyos resultados se recogen y se muestran en la Tabla 6.II y en la Figura 6.2, respectivamente.

Modo propio	Patrón modal (completo)	Frecuencia (Hz)
1	(2,2)	38.862
2	(1,4)	54.443
3	(3,2)	72.596
4	(2,4)	74.638

Tabla 6.II. Frecuencias propias de los primeros modos de flexión del resonador bajo ensayo (acoplamiento estructura-fluido)

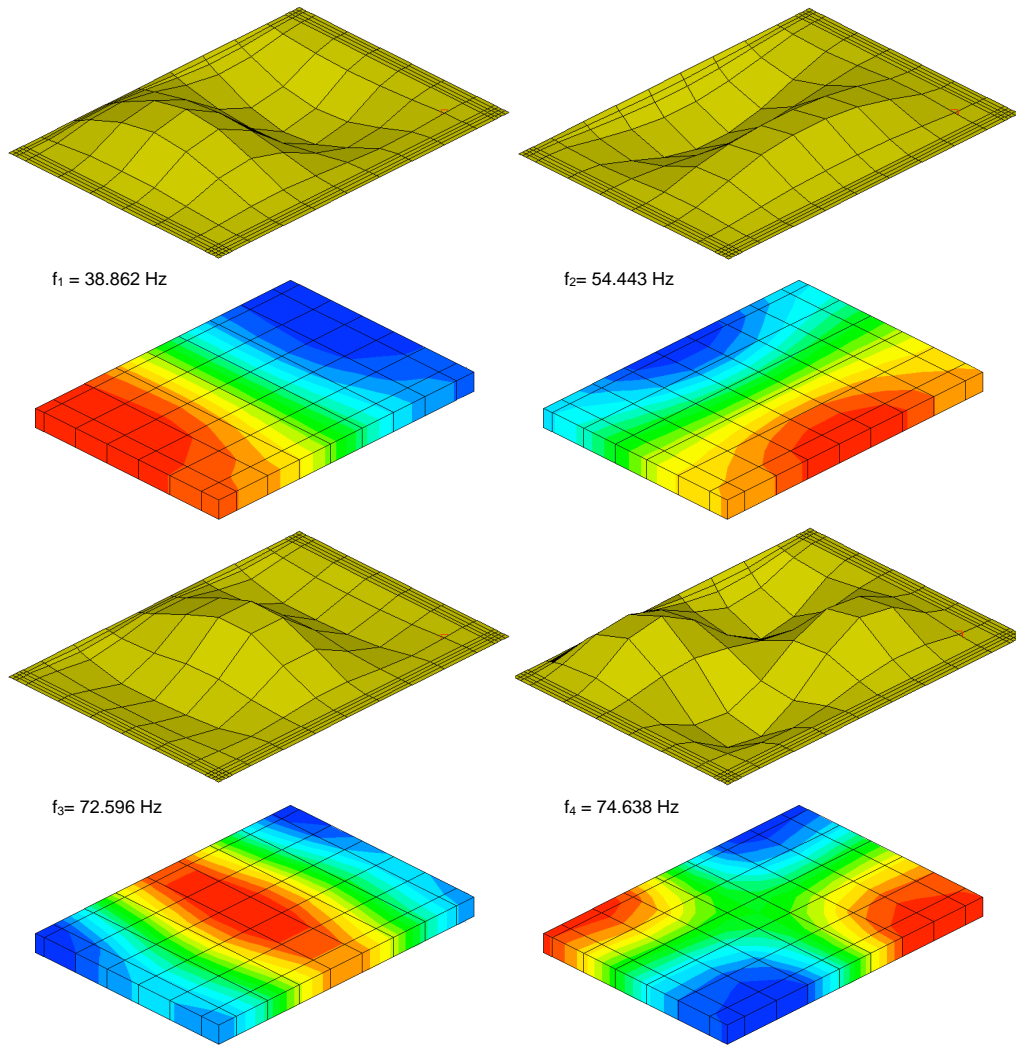


Figura 6.2. Primeros cuatro modos propios del resonador “mitad” (acoplamiento estructura-fluido): desplazamientos vibratorios de la placa (mapa monocromático con relieve) y distribución de la presión acústica dentro de la cavidad de aire bajo la placa (mapas de color).

En primer lugar, podemos observar que las frecuencias propias de flexión de la placa del resonador son menores que en aquellas de la placa cuando no se considera el acoplamiento estructura-fluido. Esto es debido al efecto inercial del colchón de aire, que supone un incremento de la masa efectiva de la placa. Además, se comprueba que los dos primeros modos de flexión de la placa sin acoplar, correspondientes a un desplazamiento en forma de media senoide de las mitades del resonador acopladas a sendas cavidades y cuyas frecuencias se encuentran por debajo de la frecuencia fundamental del sistema masa-resorte f_0 , no se llegan a producir. De lo contrario, y de acuerdo con Cremer [3], esto significaría que la rigidez del colchón de aire predomina sobre la rigidez de la placa.

La frecuencia fundamental del sistema masa-resorte viene dada por:

$$f_0 = \frac{60}{\sqrt{md}} = \frac{60}{\sqrt{\rho h d}} = \frac{60}{\sqrt{945.5 \cdot 0.003 \cdot 0.045}} = 167.9 \text{ Hz} \quad (6.1)$$

donde m es la densidad superficial de la placa en kgm^{-2} , igual al producto de su densidad volumétrica ρ y su espesor h ; y d es la distancia entre la placa y la superficie rígida sobre la que se apoya el resonador, es decir, el grosor de la capa de aire que se forma en el interior, en metros.

Es interesante considerar también la distribución de la presión sonora del aire en el interior de la cavidad. En primer lugar, se observa que las distribuciones de presión sonora para las frecuencias propias de flexión de la placa (máxima vibración de la placa acoplada) no se corresponden a modos acústicos de la cavidad. A partir de los resultados obtenidos podemos intuir que para las primeras frecuencias propias del resonador, y en general para frecuencias por debajo de la frecuencia fundamental del sistema masa-resorte f_0 , el colchón de aire se comporta como un fluido que se desplaza de un lugar a otro en el interior de la cavidad (Cremer [3]).

De lo anterior se desprende que tan sólo podrán existir aquellos modos acústicos de la cavidad cuya frecuencia sea superior a f_0 . Los modos acústicos de las cavidades, que también han sido calculadas y se muestran en la Figura 6.3, tienen lugar a frecuencias superiores a 210 Hz aproximadamente.

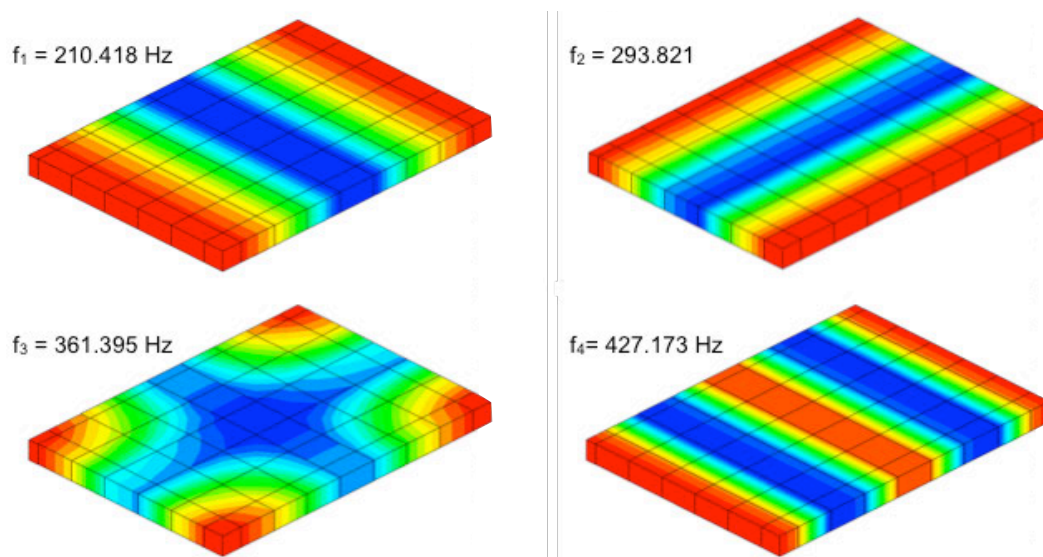


Figura 6.3. Primeros modos acústicos de las cavidades del resonador (sin acoplamiento)

No obstante, debemos tener en cuenta que estos resultados sólo pueden ser considerados de forma cualitativa debido a las limitaciones del modelo simplificado desarrollado. Tanto la forma de los modos propios como los valores de sus frecuencias pueden variar con respecto al comportamiento real del resonador, ya no sólo por la dificultad de establecer con precisión las condiciones frontera del modelo, sino también como consecuencia de la simplificación por simetría llevada a cabo. Y es que al considerar sólo la mitad del resonador, no se tiene en cuenta la carga que supone la otra mitad del resonador sobre el eje de simetría. Además, en este caso no se producen modos simétricos respecto al eje transversal de simetría del resonador completo.

6.3 Respuesta vibratoria experimental del resonador

A partir del análisis FFT de las señales temporales de aceleración vibratoria registradas en los diferentes puntos de medida (y en el punto de excitación), se han obtenido las funciones de respuesta en frecuencia promedio de las tres mediciones realizadas en cada uno de ellos, tal y como se ha comentado en el Capítulo 5. Para hacernos una idea global preliminar del comportamiento real del sistema, se han superpuesto las respuestas en frecuencia (FRF) promedio de todos los puntos evaluados –Figura 6.4–, en el margen de frecuencias de 1 a 100 Hz. Asimismo, se representa la función densidad de probabilidad (FDP) de todos los modos propios identificados a partir de dichas FRFs.

En primer lugar, se comprueba que por debajo de 10 Hz no se localiza ningún modo propio de flexión aparente. Aunque se observan algunos picos de frecuencia, se deben fundamentalmente a la componente continua introducida por el campo magnético empleado para la transmisión de la excitación del agitador mecánico al panel del resonador. Un posible efecto leakage hace que la energía de esta componente continua se disperse a frecuencias próximas (apreciable en el rango 1-5 Hz, aproximadamente). Además, la práctica totalidad de los picos de las FRFs en tan baja frecuencia presentan una baja coherencia, por lo que serán directamente desestimados.

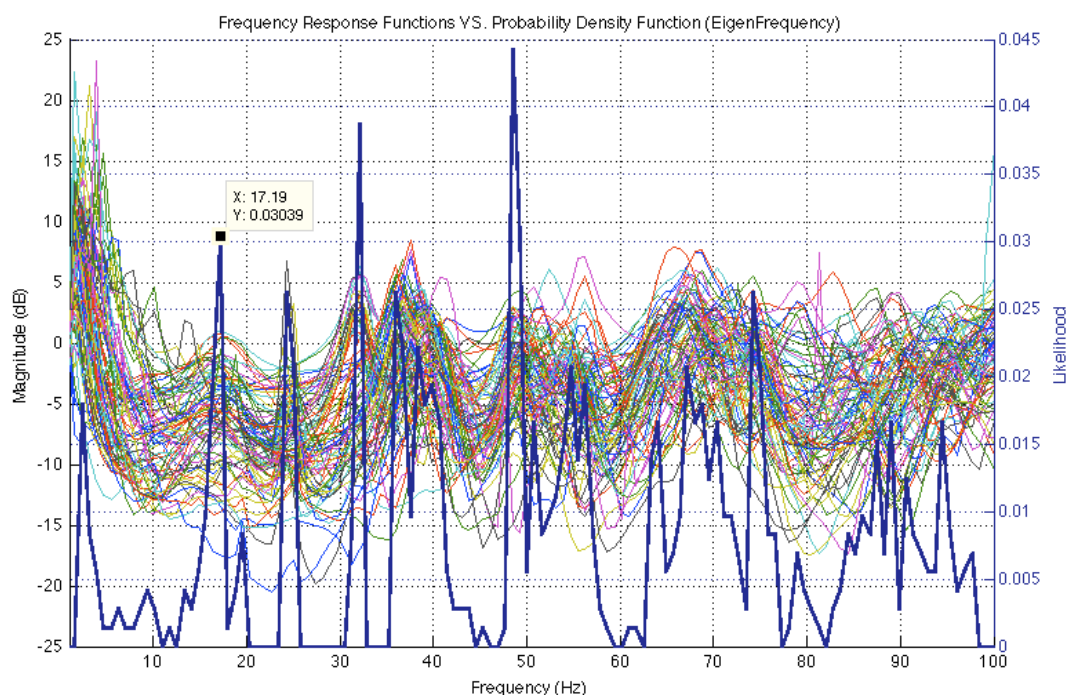


Figura 6.4. Superposición de las FRFs promedio para todos los puntos de medida del sistema (eje de ordenadas izquierdo), y FDP de los modos propios identificados (eje de ordenadas derecho)

A la vista de los resultados de la Figura 6.4, y como comprobaremos más adelante, la superposición de las FRFs muestra cierta variabilidad en las frecuencias de resonancia del sistema. Este hecho se aprecia más claramente atendiendo a la distribución estadística de las frecuencias naturales identificadas. Se puede observar, por ejemplo, que el máximo de la FDP situado en las proximidades de $f=17.2$ Hz presenta una cierta anchura, además de la aparición de otros dos máximos relativos de menor amplitud a sendos lados del primero. Esto supone un claro indicativo de la no coincidencia de la frecuencia propia del primer modo de vibración del resonador para todos los puntos en los que se ha evaluado su respuesta.

Así, la dispersión de los resultados obtenidos en el proceso de identificación modal pone de manifiesto la heterogeneidad de las propiedades físicas de la tabla, lo que ya habíamos intuido por el tipo de material empleado para la construcción del resonador (contrachapado de madera). Idealmente, para un material isótropo, las frecuencias propias del sistema deberían coincidir de forma exacta para todos los puntos de medida. Por tanto, no puede ser considerada realmente como un material isótropo. No obstante, dada la dificultad que presenta la caracterización precisa de

este tipo de materiales, esta idealización de los modelos empleados en las simulaciones supone una aproximación más que razonable para el fin que nos ocupa.

Para la identificación de los primeros modos propios del sistema, se evaluarán aquellos resultados obtenidos para una serie de puntos de medida que sean suficientemente representativos del comportamiento dinámico del sistema en el margen de frecuencias de 10 – 50 Hz, aproximadamente. Por encima de este rango, se comprueba que el acoplamiento modal comienza a ser excesivo para el análisis de modos individuales.

La estrategia empleada para la selección dichos puntos de medida es la siguiente. Se consideran seis puntos en cada una de las mitades del resonador, para los que se espera una mayor excitación de los primeros modos del sistema. Cinco de ellos están situados relativamente cerca de las esquinas de las áreas bajo las que se encuentran sendas cavidades acústicas, estando el último localizado cerca del centro geométrico de las mismas. Los puntos seleccionados, cuya localización sobre la placa se muestra en la Figura 6.5, son los siguientes: 11, 21, 25, 32, 38, 43, 65, 70, 77, 92, 93 y 105.

1	2	3	4	5	6	7	8	
10	11	12	13	14	15	16	17	
19	20	21	22	23	24	25	26	
28	29	30	31	32	33	34	35	
37	38	39	40	41	42	43	44	
46	47	48	49	50	51	52	53	
55	56	57	58	59	60	61	62	
64	65	66	67	68	69	70	71	
73	74	75	76	77	78	79	80	
82	83	84	85	86	87	88	89	
91	92	93	94	95	96	97	98	
100	101	102	103	104	105	106	107	

Figura 6.5. Posiciones de medida cuyos resultados serán evaluados.

En las siguientes figuras se muestran las funciones de respuesta en frecuencia y los modos propios identificados a partir de las mismas para los puntos considerados. Las zonas en color gris representan los intervalos de frecuencia en los que se ha obtenido una coherencia menor a 0.80. De forma análoga, los modos propios identificados en dichas regiones se muestran en el mismo color. En estos casos, no es posible garantizar que la respuesta obtenida se corresponda realmente al sistema o sea debida a la presencia de ruido, la aparición de leakage en el análisis o no linealidades del sistema analizado. Y aunque los modos aquí identificados puedan ser de cierta utilidad para intuir ciertos comportamientos del resonador, estos deberán ser validados en otros puntos de medida donde la función de coherencia presente valores suficientemente elevados.

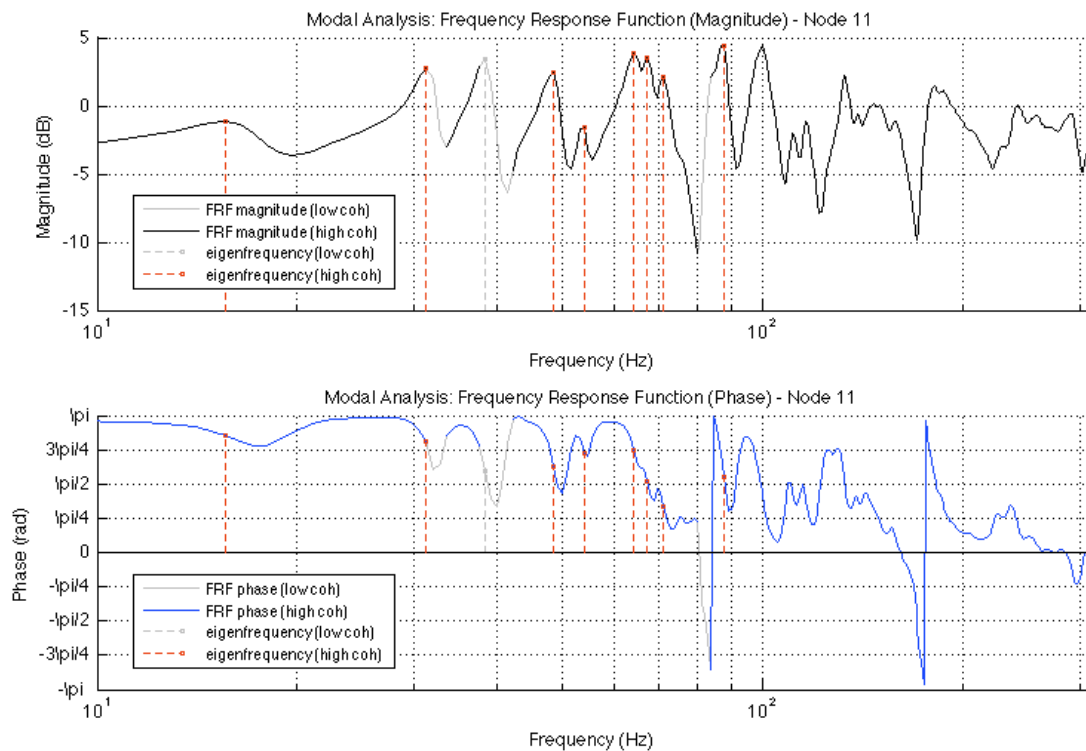


Figura 6.6. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 11.

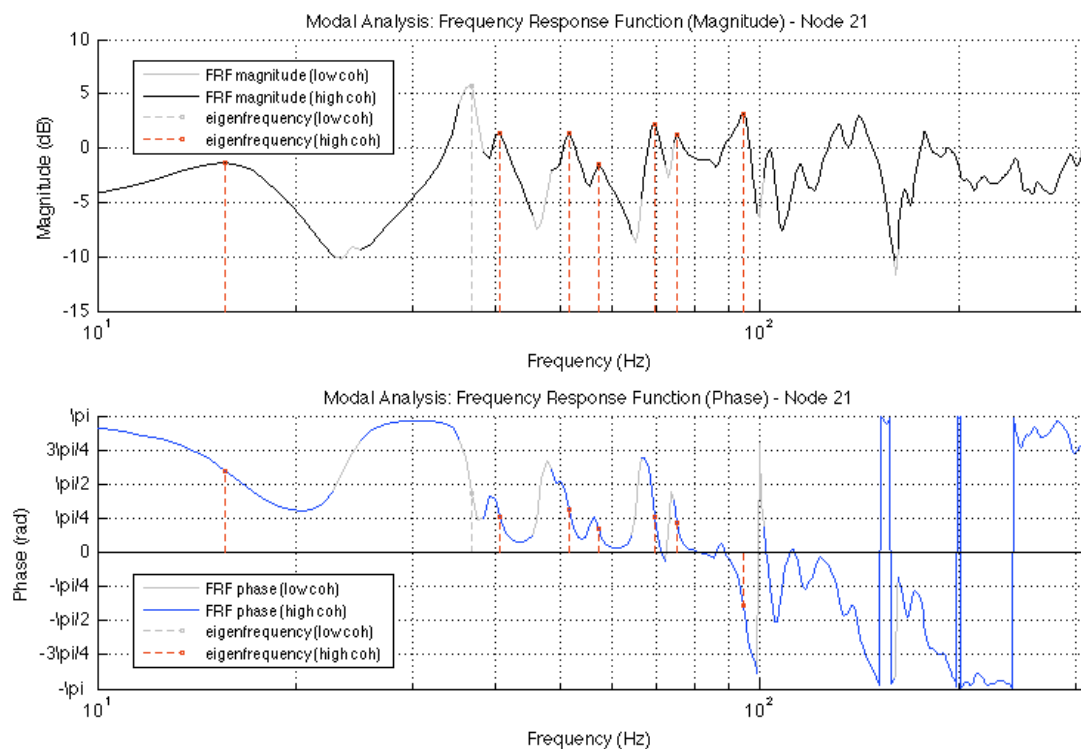


Figura 6.7. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 21.

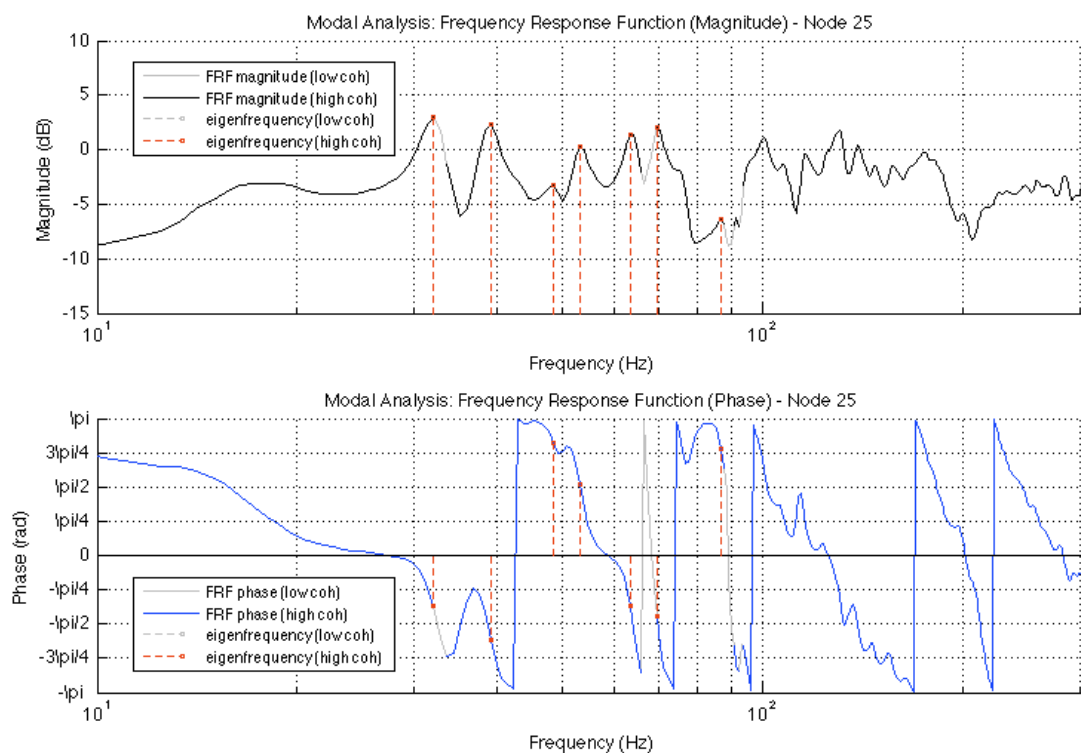


Figura 6.8. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 25.

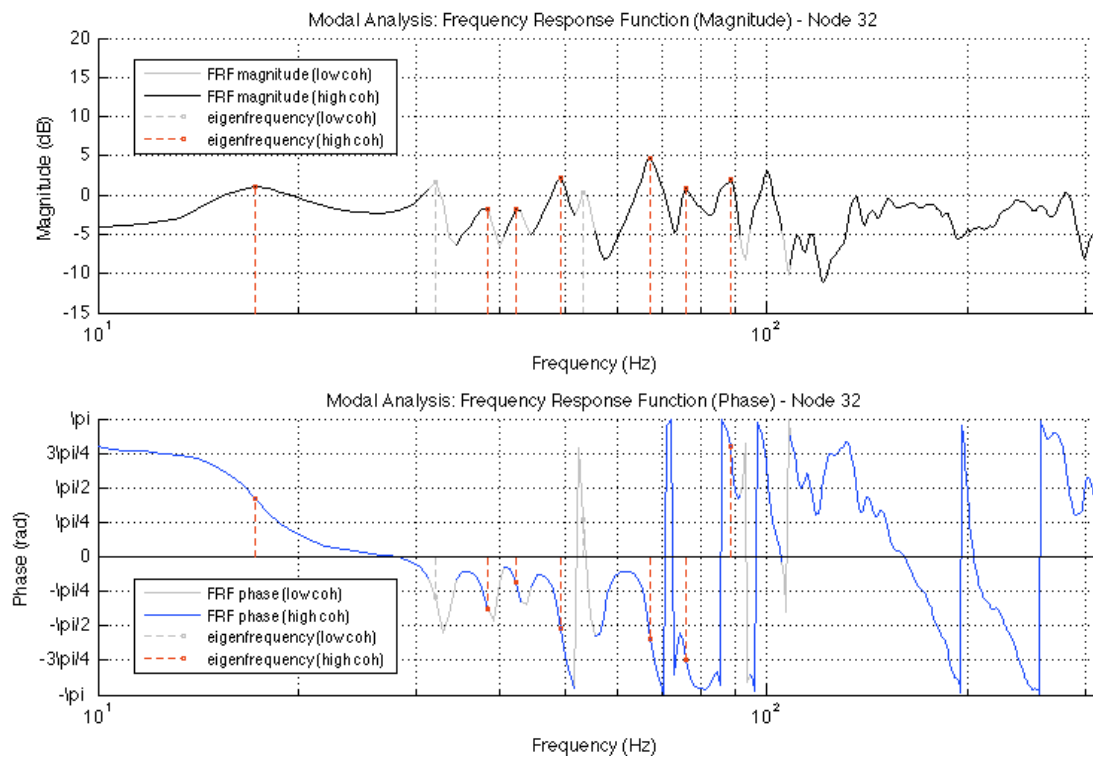


Figura 6.9. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 32.

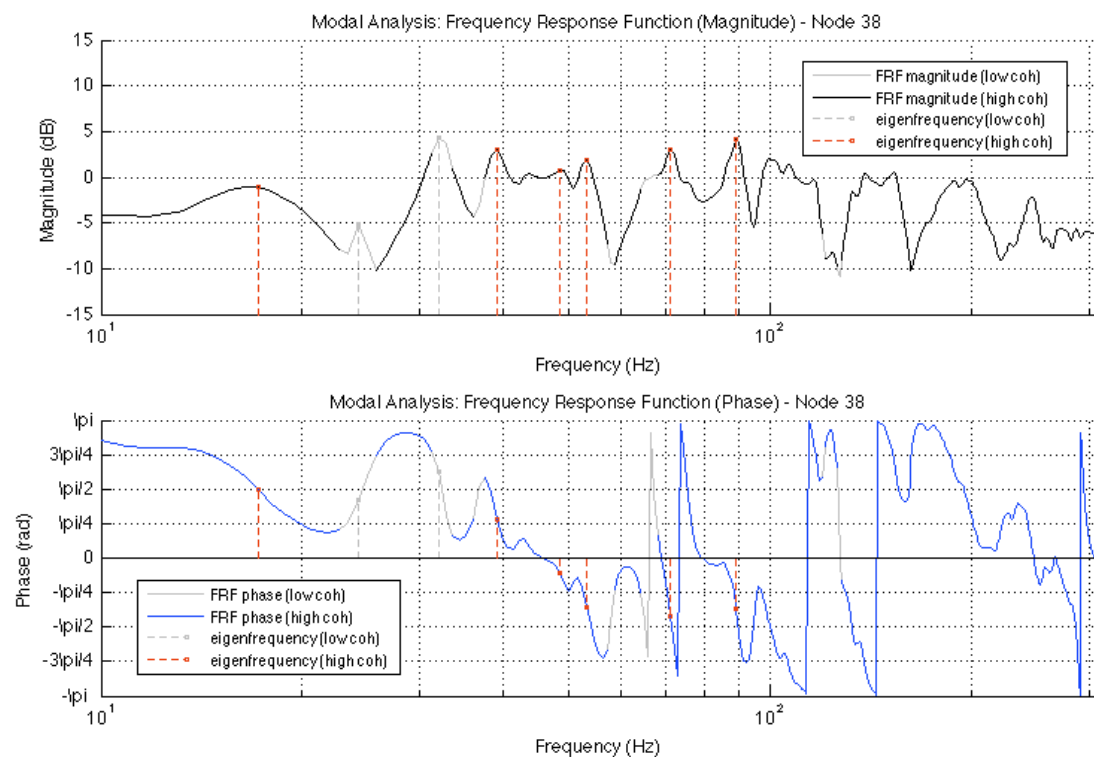


Figura 6.10. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 38.

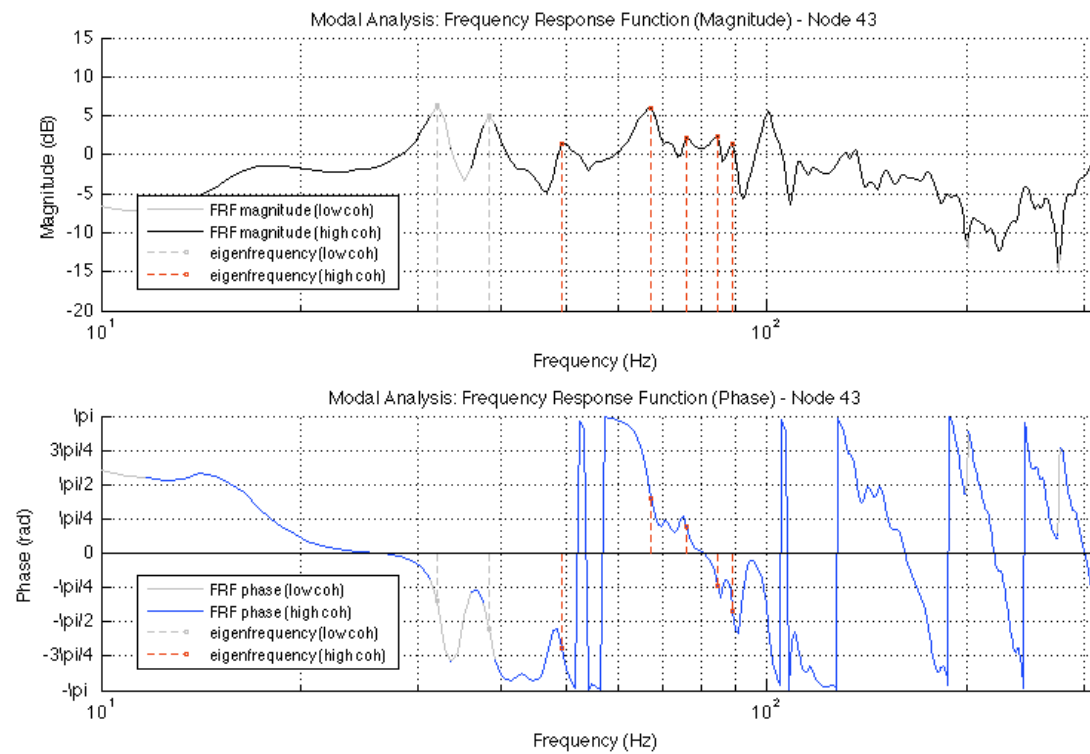


Figura 6.11. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 43.

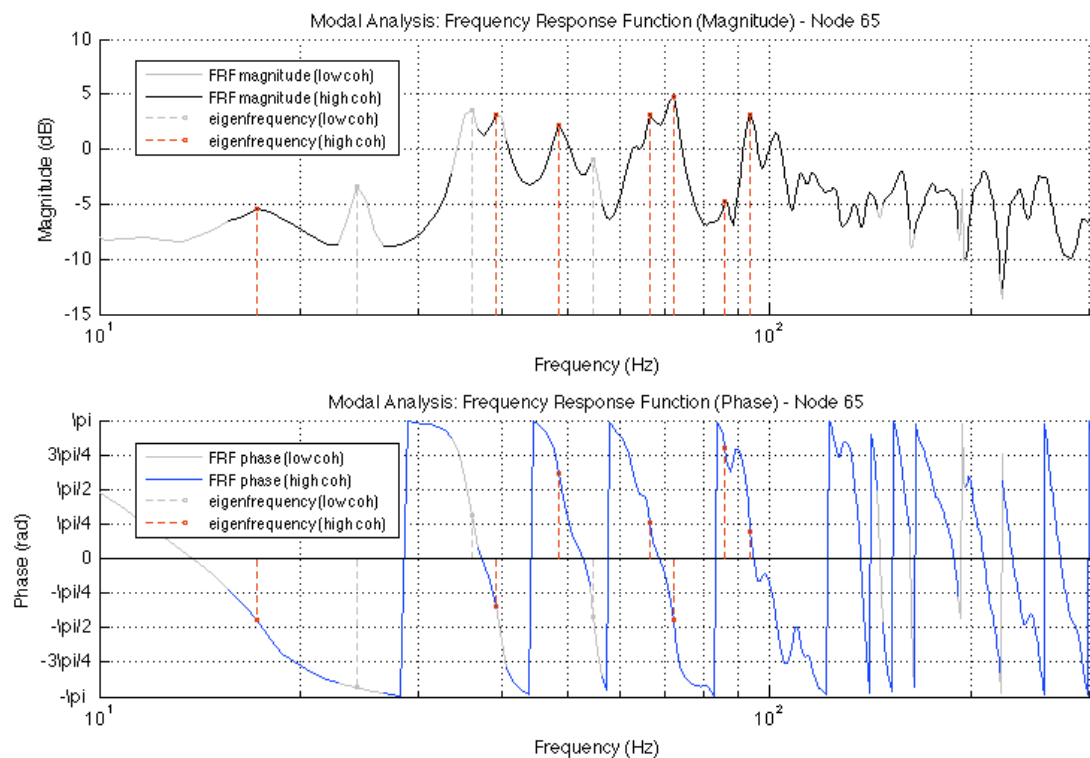


Figura 6.12. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 65.

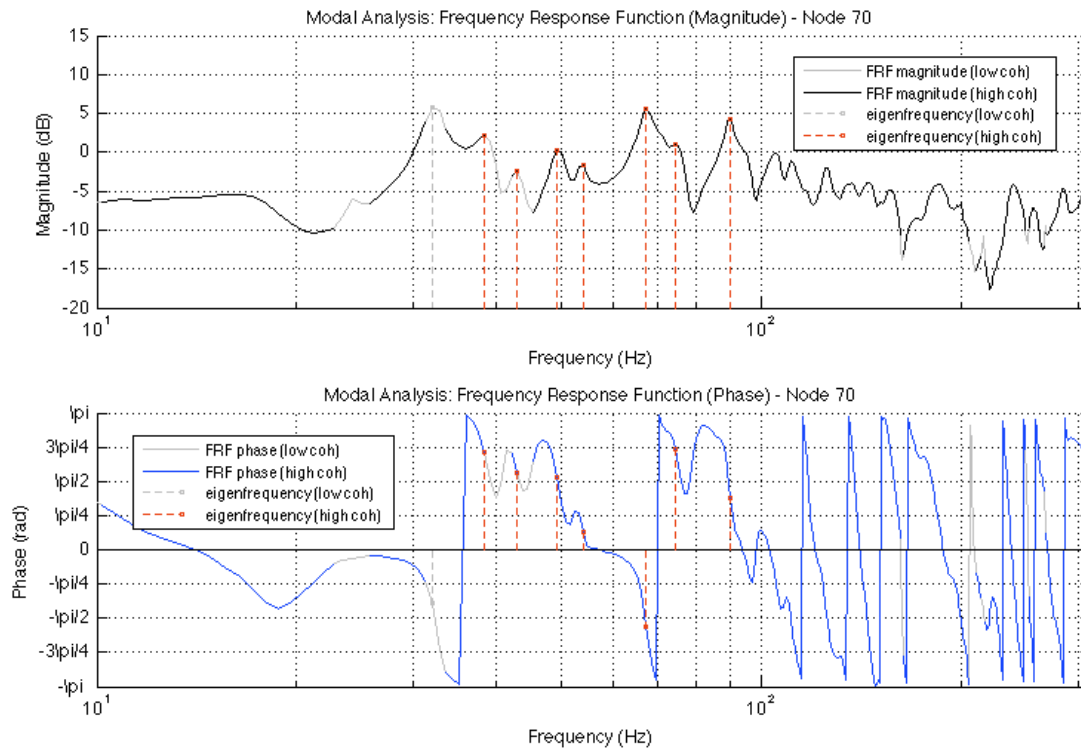


Figura 6.13. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 70.

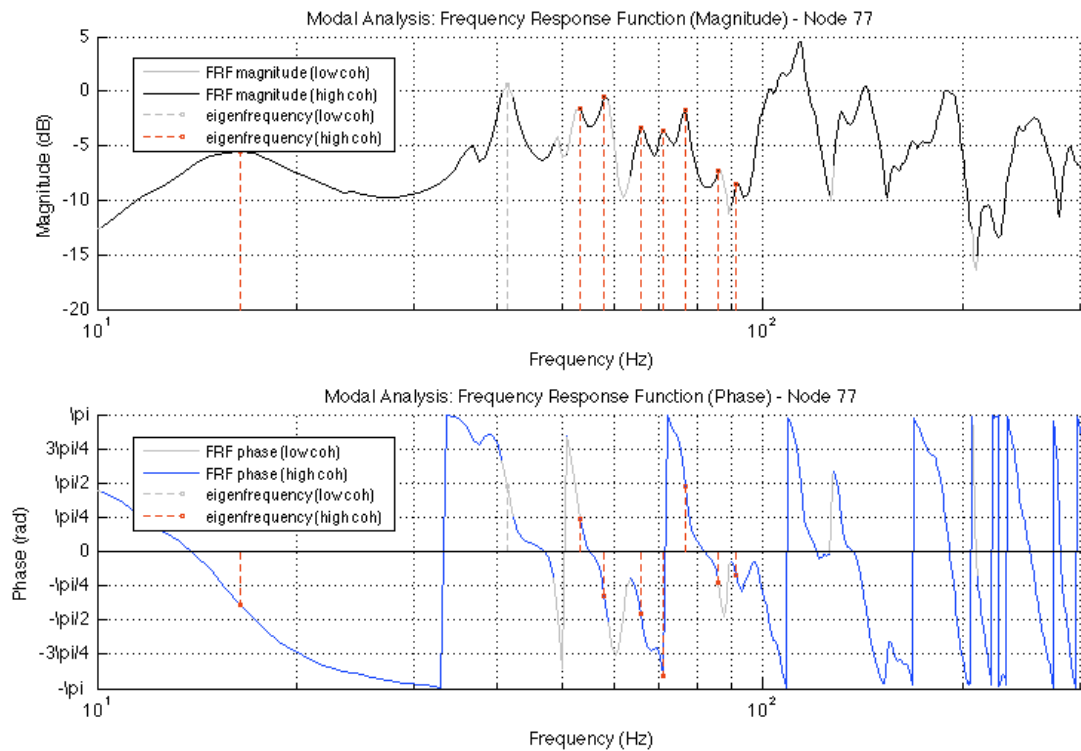


Figura 6.14. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 77.

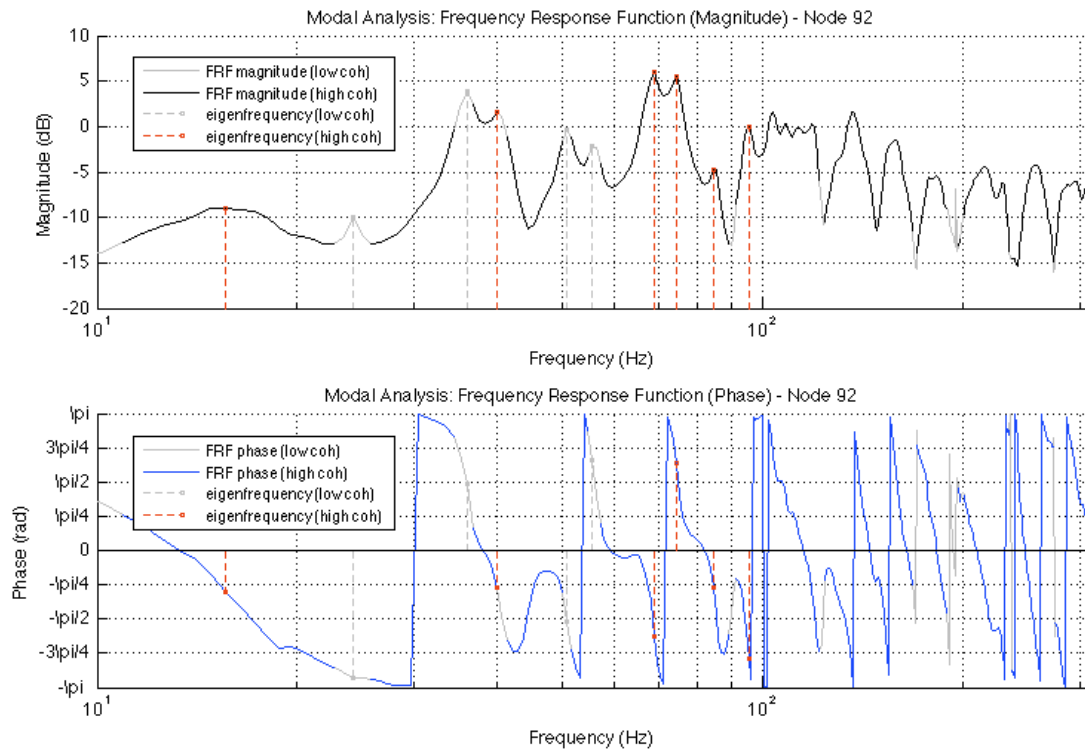


Figura 6.15. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 92.

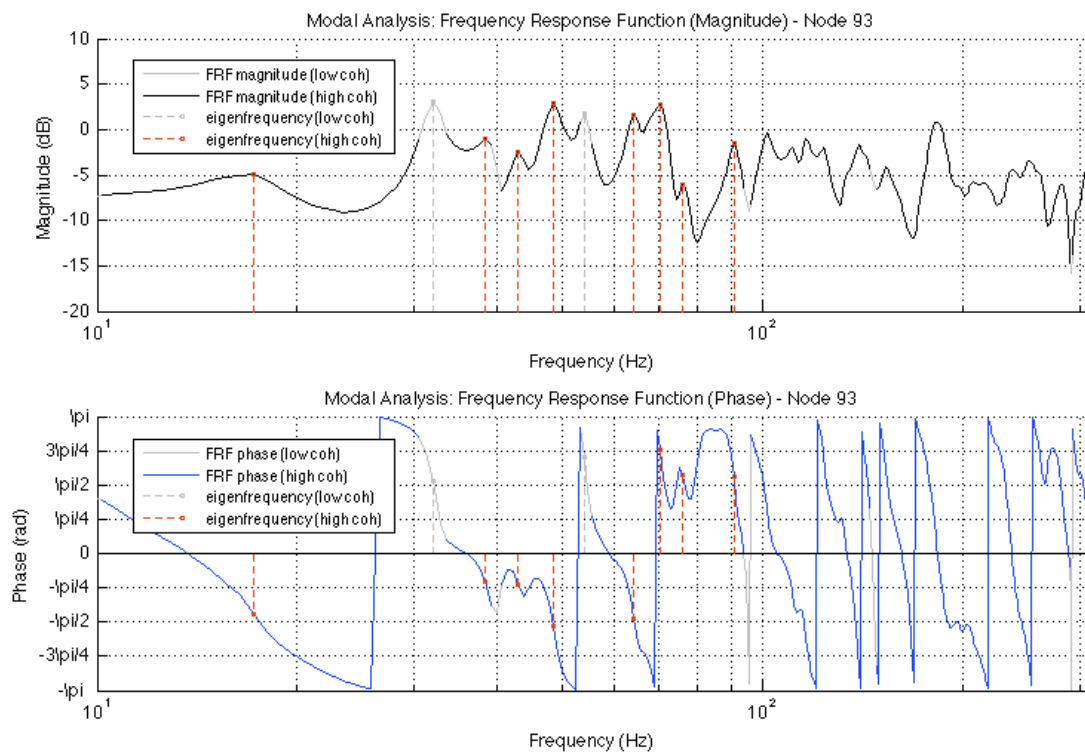


Figura 6.16. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 93.

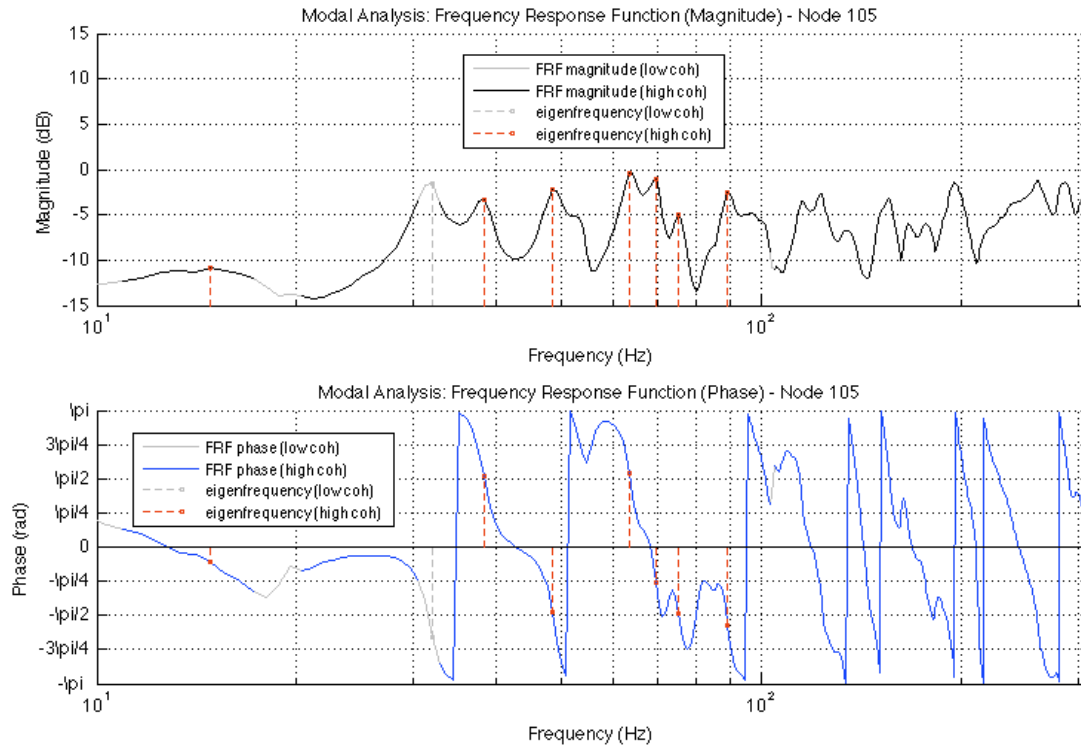


Figura 6.17. Función de respuesta en frecuencia del sistema y frecuencias propias identificadas en el punto 105.

Para facilitar el estudio de los primeros modos propios del resonador y la identificación de sus patrones correspondientes, en las siguientes tablas se recogen los datos más relevantes de los resultados del análisis modal presentados en las figuras anteriores. Estos datos no son otros que las frecuencias naturales obtenidas y las fases relativas de la aceleración para dichas frecuencias, estimadas en cada uno de los puntos de medida considerados con anterioridad. Los datos presentados en color gris indican, al igual que en las figuras anteriores, que la coherencia obtenida no supera el umbral establecido (0,8).

A partir de estos datos, podemos observar que algunas frecuencias propias coinciden para algunos de los puntos seleccionados. No obstante, se comprueba una vez más la variabilidad de los resultados obtenidos, y que ya comentamos al principio de esta sección. Por tanto, a la hora de establecer las frecuencias propias del sistema, nos basaremos en un análisis estadístico de dichos resultados.

Punto de medida	Frecuencia Natural (Hz)	Fase relativa (rad)	Punto de medida	Frecuencia Natural (Hz)	Fase relativa (rad)
11	15.63	2.67	65	17.19	-1.38
	31.25	2.54		24.22	-2.91
	38.28	1.88		35.94	0.98
	48.44	1.99		39.06	-1.08
21	15.63	1.87		48.44	1.95
	36.72	1.37	70	32.03	-1.23
	40.63	0.81		38.28	2.24
25	32.03	-1.16		42.97	1.77
	39.06	-1.93	77	49.22	1.68
	48.44	2.60		16.41	-1.21
32	17.19	1.31		41.41	1.48
	32.03	-0.91	92	15.63	-0.95
	38.28	-1.20		24.22	-2.91
	42.19	-0.58		35.94	1.54
	49.22	-1.64		39.84	-0.86
38	17.19	1.55	93	17.19	-1.40
	24.22	1.34		32.03	1.65
	32.03	1.98		38.28	-0.66
	39.06	0.89		42.97	-0.71
	48.44	-0.34	105	48.44	-1.65
43	32.03	-1.10		14.84	-0.33
	38.28	-1.75		32.03	-2.06
	49.22	-2.18		38.28	1.62
				48.44	-1.49

Tabla 6.III. Frecuencias propias del sistema y fase relativa de la respuesta para dichas frecuencias en los diferentes puntos de medida considerados.

Podemos considerar que los valores de frecuencia observados para cada modo propio quedan representados por una distribución normal, centrada en la frecuencia natural media correspondiente a dicho modo y con una cierta desviación. Dispondremos, por tanto, de tantas gaussianas como modos propios presenta el sistema. Así, se asumen como frecuencias naturales del sistema aquellos valores correspondientes a los máximos de la función de densidad de probabilidad representada en la Figura 6.18. Este criterio sólo es aplicable para modos relativamente separados entre sí (lo que en buena medida se cumple dentro del margen de frecuencia de interés); ya que conforme aumenta la frecuencia, el acoplamiento modal es cada vez mayor y resulta prácticamente imposible modelar cada modo propio mediante una gaussiana con los datos disponibles.

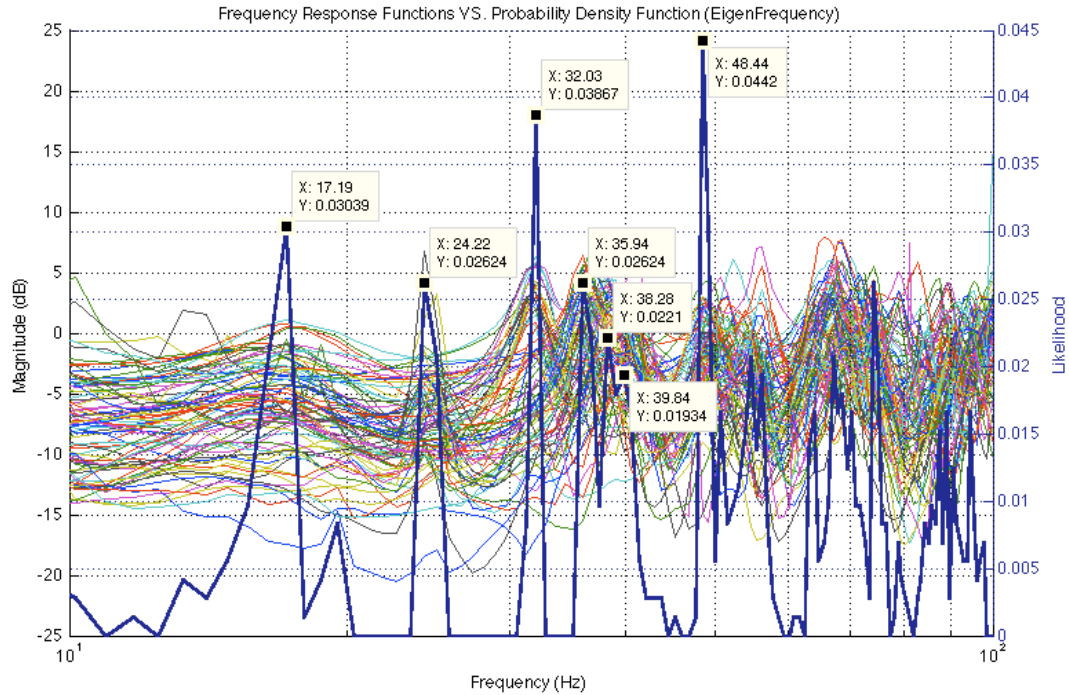


Figura 6.18. Función densidad de probabilidad de las frecuencias propias identificadas en todos los puntos de medida.

Las frecuencias propias extraídas del análisis estadístico anterior, considerando únicamente aquellos máximos de la FDP suficientemente separados entre sí (modos desacoplados), se recogen en la Tabla 6.IV junto con su correspondiente fase relativa de la aceleración para cada punto de medida. Los máximos de la FDP localizados en las frecuencias $f=35.9$ Hz, $f=38.3$ Hz y $f=39.8$ Hz están tan próximos entre sí como para sospechar que podrían corresponder realmente a un único modo propio y, por tanto, pertenecer a una misma gaussiana. No obstante, consideraremos inicialmente que son modos diferentes representados por modelos estadísticos independientes.

Frec. (Hz)	Fase relativa (rad) - Punto de medida											
	11	21	25	32	38	43	65	70	77	92	93	105
17.19	2.67	1.87		1.31	1.55		-1.38		-1.21	-0.95	-1.40	-0.33
24.22					1.34		-2.91			-2.91		
32.03	2.54		-1.16	-0.91	1.98	-1.10		-1.23			1.65	-2.06
35.94		1.37					0.98			1.54		
38.28	1.88			-1.20	0.89	-1.75	-1.08	2.24			-0.66	1.62
39.84		0.81	-1.93	-0.58				1.77	1.48	-0.86	-0.71	
48.44	1.99		2.60	-1.64	-0.34	-2.18	1.95	1.68			-1.65	-1.49

Tabla 6.IV. Fase relativa de la respuesta (aceleración) del sistema para las frecuencias propias resultantes del análisis estadístico.

A partir de estos datos, procederemos a la identificación de sus patrones modales correspondientes. Para ello, consideraremos que aquellos puntos con fase relativa positiva vibran en fase, mientras que si la fase relativa es negativa lo hacen en contrafase.

Para la primera frecuencia propia de la Tabla 6.IV, de acuerdo a la fase relativa de los puntos considerados, obtenemos el patrón de vibración de la Figura 6.19. Los puntos en fase se representan de color rojo, mientras que aquellos en contrafase se identifican mediante el color azul.

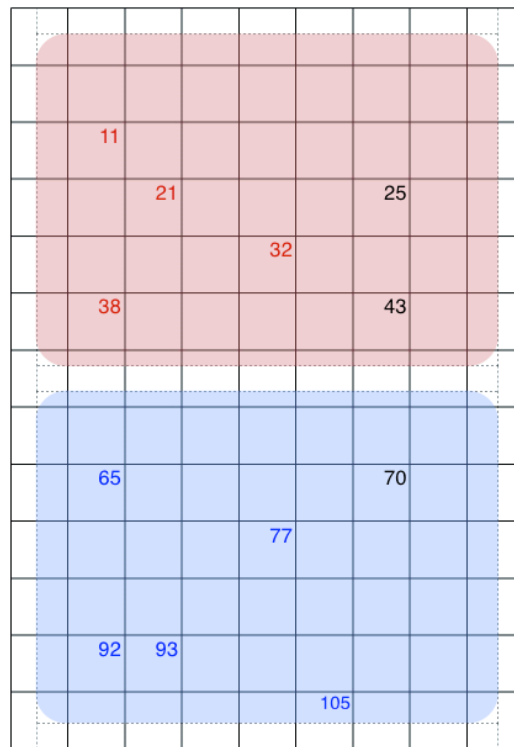


Figura 6.19. Patrón de desplazamiento identificado para la primera frecuencia modal $f=17.2$ Hz.

Podemos deducir que la frecuencia $f=17.2$ Hz se corresponde con el modo propio (1,2). Como podemos apreciar en las FRFs mostradas desde la Figura 6.6 a la Figura 6.17, este modo propio se encuentra considerablemente amortiguado y, a pesar de ser el modo que teóricamente transporta mayor energía, no tiene una gran presencia debido a la oposición que ejerce el aire encerrado en la cavidad. Además, la primera frecuencia propia de la cavidad se encuentra por debajo de la frecuencia fundamental del sistema masa-resorte, lo que supone la imposibilidad de que este modo llegue a formarse. El aire en el interior de la cavidad se mueve como un fluido en consonancia con el movimiento de la placa, como en un campo próximo [3].

Para las frecuencias $f=24.2$ Hz y $f=35.9$ Hz no se disponen de datos con una coherencia suficiente, por lo que no se puede garantizar la correspondencia con algún modo del resonador. Para otras frecuencias, algunos de los resultados obtenidos también ofrecen una baja coherencia, lo que puede dar una idea del comportamiento no lineal del sistema. Por otro lado, analizando las fases relativas en los puntos analizados para $f=32$ Hz, podemos intuir la formación del modo (2,2) simétrico –Figura 6.20-. En este caso, para muchos de los puntos evaluados, aunque no para todos, la coherencia obtenida es relativamente baja.

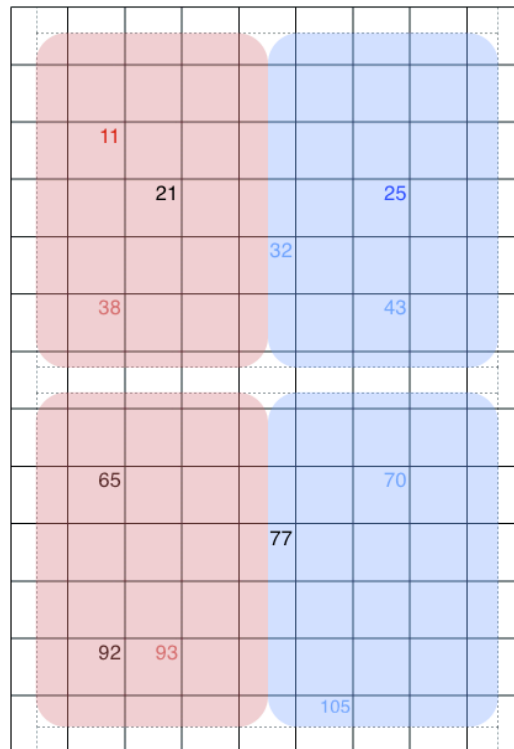


Figura 6.20. Patrón de desplazamiento para la frecuencia $f=32$ Hz.

En cuanto a las frecuencias $f=38.3$ Hz y $f=39.8$ Hz, se encuentran tan próximas que es razonable sospechar que puedan corresponder a una única frecuencia natural del sistema. Atendiendo a la fase relativa en los puntos correspondientes, tal y como se muestra en la Figura 6.21, podemos comprobar que ambas frecuencias parecen corresponder al modo (2,2). Por tanto, podemos considerar la frecuencia de dicho modo como la media de ambas, $f=38.7$ Hz.

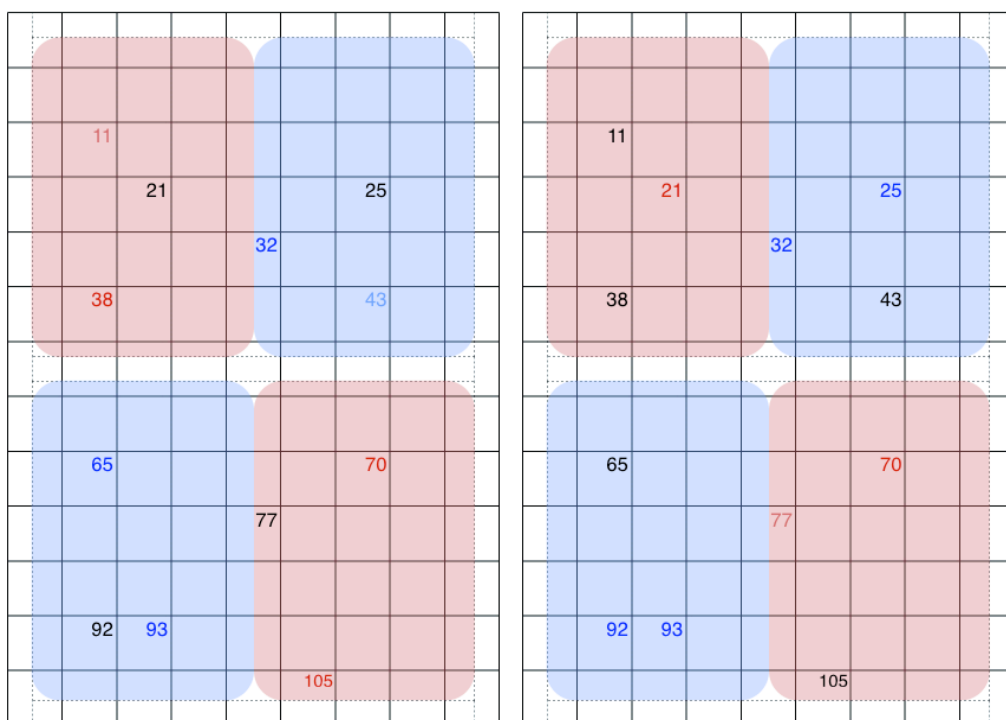


Figura 6.21. Patrones de desplazamiento identificados para las frecuencias $f=38.3$ Hz (izqda.) y $f=39.8$ Hz (dcha.)

Por último, de la representación gráfica de las fases relativas de la aceleración para la frecuencia $f=48.4$ Hz (Figura 6.22) podemos deducir que se trata del modo (4,1).

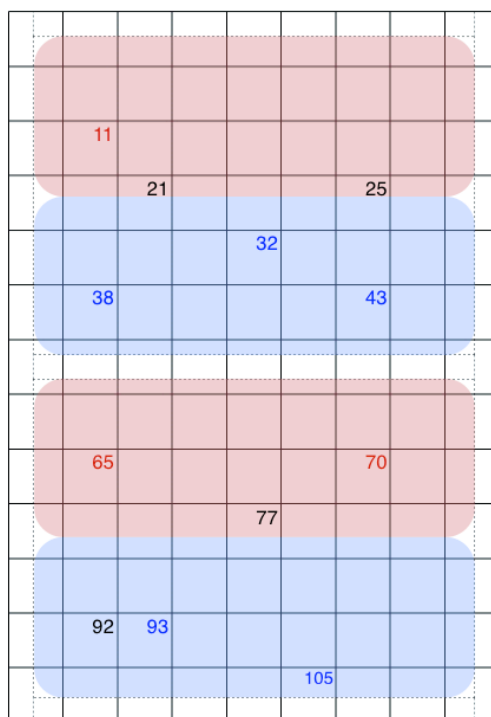


Figura 6.22. Patrón de desplazamiento identificado para $f=48.4$ Hz.

Por último, en la Tabla 6.V se recogen y comparan, a modo de resumen, los resultados de la identificación modal obtenidos en las simulaciones y en el análisis experimental.

Patrón modal	Frecuencia (Hz)		
	Simulación placa (sin acoplamiento)	Simulación resonador "mitad"	Análisis Experimental
(1,2)	22.2	22.2	17.2
(1,2) simétrico	27.6	-	-
(2,2) simétrico	44.3	-	32
(2,2)	47.5	38.862	38.7
(1,4)	59.3	54.443	48.4
(1,4) simétrico	73.5	72.596	-

Tabla 6.V. Comparativa de las frecuencias propias obtenidas para la placa (simulación sin acoplamiento), el resonador “mitad” (simulación con acoplamiento) y el resonado bajo ensayo (análisis experimental)

7 Conclusiones

Dadas las sospechas iniciales de la heterogeneidad y la posible no linealidad del resonador, más que fundamentadas considerando las propiedades de los materiales empleados para su construcción, se ha optado por utilizar el método de la excitación aleatoria para la medición de la respuesta del sistema. Este método, recordemos, es uno de los métodos recomendados y más apropiados para el análisis de sistemas no lineales. También se han llevado a cabo mediciones empleando otro tipo de excitación, concretamente el barrido sinusoidal, que finalmente ha sido descartado. A la vista de los resultados obtenidos, podemos considerar que esta decisión ha sido de lo más acertada.

Se ha controlado con especial cuidado el montaje del excitador y del resonador para la realización del ensayo experimental, así como la presencia de ruido de fondo, con el fin de evitar la aparición de vibraciones ajenas a la propia respuesta del sistema y su influencia en la evaluación del comportamiento del sistema.

En cuanto a la herramienta de análisis FFT/modal, se ha comprobado que ofrece unos resultados fiables, tras compararlos con aquellos obtenidos mediante sistemas de adquisición y análisis comerciales. Asimismo, sería posible desarrollar e implementar nuevas funciones que incrementen sus posibilidades de análisis, o que permitan su utilización con otro tipo de excitaciones diferentes a las especificadas y que requieran de algún tipo de procesamiento adicional (p. ej. funciones de disparo o 'trigger'). Por tanto, supone una herramienta útil y flexible para este tipo de análisis, permitiendo realizar cualquier tipo de procesamiento adicional en la plataforma MATLAB.

Los resultados del análisis modal experimental llevado a cabo muestran una considerable dispersión de las frecuencias naturales del sistema identificadas en los diferentes puntos de medida sobre la placa del resonador. Este hecho pone de manifiesto la heterogeneidad de la placa de contrachapado de madera.

Por otro lado, se han obtenido valores relativamente bajos de la función de coherencia, calculada en el análisis FFT, para algunas frecuencias de resonancia y posiciones de medida de las señales de aceleración registradas. Incluso, para algunas de estas supuestas frecuencias de resonancia, no se han obtenido resultados fiables con una elevada coherencia para ninguno de los puntos evaluados. Teniendo en cuenta que el posible ruido de fondo presente en las mediciones ha estado controlado en todo momento, y que se ha seleccionado cuidadosamente el tipo de ventana empleada en el análisis FFT con el fin de reducir

la aparición de 'leakage', podemos atribuir esta baja coherencia en algunos resultados fundamentalmente a la no linealidad del sistema ensayado. No obstante, no podemos descartar tajantemente la influencia de los primeros factores en esta cuestión.

La heterogeneidad del material empleado para la construcción del resonador, unido a la no linealidad del mismo, dificultan considerablemente el estudio de su comportamiento dinámico y la caracterización de sus modos propios. Estos hechos han de ser tenidos en cuenta a la hora de valorar los resultados y las conclusiones extraídas de el presente análisis.

En cuanto a los modelos utilizados para la simulación del comportamiento del resonador, cabe destacar la práctica imposibilidad de reproducir con fidelidad las condiciones reales de fijación de la placa del resonador. Esto afecta fundamentalmente a las frecuencias propias de flexión de la placa, no tanto a los patrones de deformación de la misma en el margen de baja frecuencia, de interés para el objeto que nos ocupa.

A pesar de no ser un sistema excesivamente complejo, las dificultades y limitaciones a la hora de elaborar el modelo completo del resonador considerando el acoplamiento estructura-fluido nos ha llevado a considerar un modelo simplificado a partir de la condición de simetría transversal del sistema. Los resultados obtenidos no pueden considerarse definitivos en términos cuantitativos, ya que no se tiene en cuenta la carga que supone la otra mitad de la placa sobre el modelo mitad desarrollado. No obstante, permite realizar algunas valoraciones cualitativas del comportamiento del resonador y del acoplamiento mecánico-acústico que tiene lugar en el mismo, suficiente para los objetivos establecidos en este trabajo.

En cuanto al comportamiento del sistema, se puede observar que el acoplamiento de la estructura con el colchón de aire encerrado en las cavidades provoca una reducción de las frecuencias propias del sistema en comparación con el comportamiento de la placa sola, extraído del modelo mecánico de la misma sin considerar acoplamiento alguno. Esto es debido al efecto inercial del aire, que se manifiesta en forma de un aumento de la masa efectiva de la placa.

En comparación con el resonador original ("entero") que sirve de punto de partida en la elaboración del presente trabajo, el primer modo propio del sistema analizado se corresponde con el segundo modo del resonador "entero" (1,2).

Lógicamente, la desaparición del modo (1,1) responde a la fijación de la placa en su eje de simetría transversal al travesaño añadido al marco que sirve de soporte exterior de la placa, y que divide físicamente la cavidad original en dos nuevas cavidades independientes de menor longitud (su anchura y profundidad se mantienen inalterados). Y lo mismo ocurre con todos aquellos modos del resonador original con máximos de respuesta en dicho eje de simetría transversal. Así, la primera frecuencia natural del resonador analizado (17.2 Hz) prácticamente se duplica con respecto al caso del resonador original, o “entero” (7.6 Hz).

Por otro lado, la fijación de la placa en su eje de simetría transversal trae consigo otro efecto sobre el comportamiento del resonador: la aparición de modos propios de flexión simétricos. Estos modos no pueden producirse en la placa fija únicamente en sus extremos, ya que las líneas nodales suponen obligadamente un cambio de fase en el desplazamiento. Sin embargo, esto no tiene por qué ser así cuando la condición de desplazamiento nulo está impuesta por elementos de fijación o fuerzas mecánicas estáticas externas.

Un parámetro crucial para el diseño de resonadores de membrana es la frecuencia fundamental del sistema masa (de la placa) – resorte (del colchón de aire de la cavidad), f_0 . Su valor puede ser estimado con suficiente precisión, siendo conocidas las propiedades intrínsecas de los materiales que componen el resonador y las dimensiones del mismo, mediante la ecuación extraída a partir de la impedancia del modelo simplificado de un resonador de este tipo. Aunque el presente trabajo no pretende dar respuesta a las cuestiones propias del diseño de este tipo de sistemas resonantes, esta frecuencia fundamental resulta de especial interés para la evaluación del comportamiento dinámico del resonador bajo ensayo.

Si la frecuencia del primer modo de flexión de la placa (22.2 Hz), correspondiente a un patrón de deformación con forma similar a media senoide sobre la cavidad (cavidades en este caso), es mucho menor a la frecuencia fundamental del sistema masa-resorte (167.9 Hz), este modo no llega a producirse, ya que eso supondría que la rigidez de la capa de aire domina a aquella de la placa. Aunque en los resultados experimentales podemos observar que sí aparece este modo (1,2 anti-simétrico), lo hace de forma débil y muy amortiguada. El modo (1,2 simétrico), por el contrario, no se llega a producir.

Un último aspecto importante a considerar es el comportamiento acústico del colchón de aire, concretamente la distribución de la presión sonora en el interior de

las cavidades. Aunque no se han realizado mediciones para la evaluación experimental de este aspecto, se puede intuir en las simulaciones realizadas que para frecuencias por debajo de la frecuencia fundamental del sistema masa-resorte f_0 , el aire encerrado se comporta como un fluido que se desplaza de un lugar otro en el interior de la cavidad (evitando ser comprimido y no siendo posible, por tanto, la formación de resonancias) de acuerdo a los patrones de deformación de la placa. De este modo, tan sólo podrán existir aquellos modos acústicos de la cavidad cuya frecuencia sea superior a f_0 .

A diferencia de lo que ocurría en el resonador original, la reducción en las dimensiones de las cavidades en el caso que nos ocupa hace que su primer modo propio acústico se encuentre ligeramente por encima de la frecuencia fundamental f_0 y llegue a producirse, como se desprende de los resultados de las simulaciones. Aunque el estudio de la absorción sonora del resonador quede fuera de los objetivos establecidos para el presente trabajo, este hecho podría sugerir un aumento de la absorción sonora en la banda de frecuencia de interés, para la cual ha sido diseñado y sintonizado el resonador. Y es que, como ya se ha demostrado en la literatura existente, el hecho de aumentar las dimensiones del resonador, y por ende de las cavidades acústicas, no extenderá la absorción sonora a frecuencias por debajo de f_0 .

8 Referencias bibliográficas

-
- [1] SANCHO GIL, Juan. *Absorción sonora de sistemas resonantes. Placas vibrantes como absorbente sonoro*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid (E.U.I.T.T.), 2011.
- [2] KUTTRUFF, Heinrich. *Acoustics: An introduction*. English edition. United Kingdom: Taylor & Francis, 2007. ISBN 0-415-38680-2.
- [3] CREMER, Lothar; MÜLLER, Helmut A. *Principles and Applications of Room Acoustics. Volume 2*. Schultz, Theodore J. (trad). English language edition. England: Applied Science Publishers LTD, 1982. ISBN 0-85334-114-1.
- [4] FAHY, Frank; GARDONIO, Paolo. *Sound and Structural Vibration: Radiation, Transmission and Response*. Second edition. UK: Academic Press, 2007. ISBN 0-12-373633-1.
- [5] ULIN NABATOV, Vladimir. *Acústica*. Madrid: E.U.I.T. de Telecomunicación (Universidad Politécnica de Madrid), 2000. ISBN 8495227185.
- [6] CUNHA, Álvaro; CAETANO, Elsa. Experimental Modal Analysis of Civil Engineering Structures. *Sound and Vibration* [en línea]. Junio 2006. Disponible en: <http://www.sandv.com/downloads/0606cunh.pdf>
- [7] CHATZI, Eleni. "Lectura 8". *Identification Methods for Structural Systems*. ETH (Insitute of Structural Engineering), Zurich, 25 Abril 2012.
- [8] MAIA, N. M. M.; SILVA, M. M. Modal analysis identification techniques. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*. Enero 2001.
- [9] VERBOVEN, Peter. *Frequency-Domain System Identification for Modal Analysis*. Brussel: Vrije Universiteit Brussel – Faculteit Toegepaste Wetenschappen, 2002.
- [10] SCHWARZ, Brian J.; RICHARDSON, Mark H. "Experimental Modal Analysis" [en línea]. En: *CSI Reliability Week*, Orlando FL, Octubre 1999. Disponible en: <http://vibetech.com/assets/papers/paper28.pdf>
- [11] *Theoretical and Experimental Modal Analysis* [en línea]. Indian Institute of Technology Delhi. Disponible en: <http://www.iitr.ac.in/outreach/web/CIRCIS/PG/AVN/TEMA/Theoretical%20and%20Experimental%20Modal%20Analysis.pdf>
- [12] HERLUFSEN, H. "Dual Channel FFT Analysis". *Brüel & Kjaer Technical Review*. No. 1&2, 1984

- [13] GADE, Svend; HERLUFSEN, Henrik. "Windows for FFT Analysis". *Technical Review*. No. 3&4, 1987.
- [14] "Experimental Modal Analysis". *Brüel & Kjaer Sound & Vibration Measurement A/S*.
- [15] "Basics of FFT Signal Analysis". *Crystal Instruments Webinar Series* [en línea]. Disponible en: <http://www.go-ci.com/Downloads/Basics%20of%20FFT%20Signal%20Analysis.pdf>
- [16] MOOSRAINER, Marold. Analyzing vibration with Acoustic-Structural Coupling. *ANSYS Advantage* [en línea]. Vol. III, 2ª ed., 2009. Disponible en: <http://www.ansys.com/staticassets/ANSYS/staticassets/magazine/2009/Issue.2/cadfem.pdf>

Páginas web:

- [17] <http://www.bksv.com/>
- [18] <http://www.pcb.com/>
- [19] <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/3828/fichero/Cap%C3%ADtulos%252F5+An%C3%A1lisis+modal.pdf>
- [20] <http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/3828/fichero/Cap%C3%ADtulos%252F6+An%C3%A1lisis+modal+operacional.pdf>
- [21] <http://www.mathworks.es>
- [22] <http://www.ni.com/white-paper/4278/en>
- [23] <http://www.bores.com/courses/advanced/windows/files/windows.pdf>